EVALUAREA NAȚIONALĂ

matematică

2025

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin OMEC nr. 6250/21.12.2020.

Lucrarea este elaborată în conformitate cu programa școlară pentru susținerea Evaluării Naționale pentru absolvenții clasei a VIII-a și cu modelul de structură de subiect și baremul de evaluare și notare în vigoare.

Redactare: Iuliana Ene, Roxana Pietreanu, Ionuț Burcioiu
Tehnoredactare: Adriana Vlădescu, Carmen Rădulescu, Mioara Benza
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie
Credite foto: shutterstock.com

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
Evaluarea Națională – Matematică 8 – 2025 / Gabriel Popa, Adrian Zanoschi, Gheorghe Iurea, Dorel Luchian. – Pitești : Paralela 45, 2024
ISBN 978-973-47-4148-9

I. Popa, Gabriel
II. Zanoschi, Adrian
III. Iurea, Gheorghe
IV. Luchian, Dorel

51

8

Gabriel Popa, Adrian Zanoschi,
Gheorghe Iurea, Dorel Luchian

EVALUAREA NAȚIONALĂ

matematică

2025

Editura Paralela 45

CUVÂNT-ÎNAINTE

Lucrarea *Matematică. Evaluarea Națională 2025* vine în întâmpinarea așteptărilor elevilor și profesorilor care se află pe traseul pregătirii Evaluării Naționale 2025.

Având în vedere competențele vizate prin programa de examen, precum și exigențele firești ale studiului matematicii, am gândit o structură complexă și eficientă a cărții, care implică un memorator, 14 teme/lecții recapitulative din materia pentru examen a claselor V-VIII și 85 de teste pregătitoare. Testele sunt elaborate în conformitate cu programa școlară, cu modelul de structură de subiect și cu baremul de evaluare și notare în vigoare începând cu anul 2021, luând în considerare schimbările de nuanță observate în testele de antrenament și în subiectele de examen din fiecare an de examinare.

La primele teste, elevul poate completa răspunsul în spațiul alocat, ca un exercițiu de redactare necesar în perspectiva evaluărilor, care impune viitorilor candidați un ritm de lucru și niște obiective precise. De asemenea, copiii și antrenorii lor au posibilitatea de a studia metodic baremele specifice acestui tip de subiect, întrucât testele beneficiază de răspunsuri și sugestii de rezolvare care le oferă un feedback necesar și imediat. Astfel, nivelul de pregătire de la un anumit moment se poate verifica prin autoevaluare.

Problemele au, în general, un caracter aplicativ, dar și unul ludic, iar reperele teoretice reprezintă o formă utilă de sistematizare a aparatului conceptual necesar rezolvării subiectelor, precum și lucrului de zi cu zi, în clasă și acasă.

Să fie un exercițiu cu sens, aducător de succes!

Autorii

MEMORATOR DE MATEMATICĂ

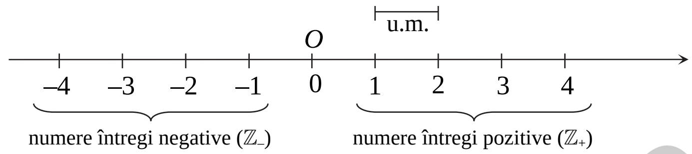
ALGEBRĂ

MULȚIMI NUMERICE

$\mathbb{N}$ – mulțimea numerelor naturale; $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

$\mathbb{Z}$ – mulțimea numerelor întregi; $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

$\mathbb{Z}_+ = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\}$; $\mathbb{Z}_- = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 0\}$.



$\mathbb{Q}$ – mulțimea numerelor raționale; $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{a}{b} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z} \text{ și } b \in \mathbb{Z}^* \right\}$. $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$; $\mathbb{Q}_+ = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$; $\mathbb{Q}_- = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\}$.

$\mathbb{R}$ – mulțimea numerelor reale, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ = mulțimea numerelor iraționale.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

OPERAȚII CU MULȚIMI

Reuniunea: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$. Intersecția: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$.

Diferența: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$.

OPERAȚII CU NUMERE

Factor comun: $f \cdot a \pm f \cdot b = f \cdot (a \pm b)$, $\forall\, a, b, f \in \mathbb{R}$.

$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{(1+n)\cdot n}{2}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ (citim: „n factorial”); $0! = 1$.

Opusul numărului real r este numărul real $-r$.

Inversul numărului real nenul r este numărul real $r^{-1} = \dfrac{1}{r}$.

TEOREMA ÎMPĂRȚIRII CU REST

În $\mathbb{N}$: $\forall\, a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$, $\exists!\, c, r \in \mathbb{N}$ astfel încât $a = b \cdot c + r$, $0 \leq r < b$.

În $\mathbb{Z}$: $\forall\, a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, $\exists!\, c \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{N}$ astfel încât $a = b \cdot c + r$, $0 \leq r < |b|$.

DIVIZIBILITATE ÎN $\mathbb{N}$

Pentru $d, m \in \mathbb{N}$ spunem că $d \mid m$ dacă există $x \in \mathbb{N}$ astfel încât $m = d \cdot x$.

Proprietăți:

P_1: $1 \mid n$; $n \mid 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$;

P_2: Dacă $a, d \in \mathbb{N}$ și $d \mid a$, atunci $d \mid a \cdot n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$;

P_3: Dacă $a, b, d \in \mathbb{N}$, $d \mid a$ și $d \mid b$, atunci $d \mid (a \pm b)$.

Criterii de divizibilitate:

I. Folosind ultima cifră a numărului: $2 \mid n \Leftrightarrow u(n) \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$; $5 \mid n \Leftrightarrow u(n) \in \{0, 5\}$; $10 \mid n \Leftrightarrow u(n) = 0$.

II. Folosind suma cifrelor numărului: $3 \mid n \Leftrightarrow 3 \mid S(n)$; $9 \mid n \Leftrightarrow 9 \mid S(n)$.

III. Folosind ultimele două cifre ale numărului: $4 \mid \overline{a...xy} \Leftrightarrow 4 \mid \overline{xy}$; $25 \mid \overline{a...xy} \Leftrightarrow 25 \mid \overline{xy}$.

G E O M E T R I E

UNITĂȚI DE MĂSURĂ

Tipul măsurătorii / Unitatea de exprimare	Submultiplii	Unitatea principală	Multiplii
Lungime	$\text{mm} \underset{\times 10}{\overset{:10}{\rightleftarrows}} \text{cm} \underset{\times 10}{\overset{:10}{\rightleftarrows}} \text{dm} \underset{\times 10}{\overset{:10}{\rightleftarrows}}$	m	$\underset{\times 10}{\overset{:10}{\rightleftarrows}} \text{dam} \underset{\times 10}{\overset{:10}{\rightleftarrows}} \text{hm} \underset{\times 10}{\overset{:10}{\rightleftarrows}} \text{km}$
Suprafață	$\text{mm}^2 \underset{\times 10^2}{\overset{:10^2}{\rightleftarrows}} \text{cm}^2 \underset{\times 10^2}{\overset{:10^2}{\rightleftarrows}} \text{dm}^2 \underset{\times 10^2}{\overset{:10^2}{\rightleftarrows}}$	m^2	$\underset{\times 10^2}{\overset{:10^2}{\rightleftarrows}} \text{dam}^2 \underset{\times 10^2}{\overset{:10^2}{\rightleftarrows}} \text{hm}^2 \underset{\times 10^2}{\overset{:10^2}{\rightleftarrows}} \text{km}^2$
Volum	$\text{mm}^3 \underset{\times 10^3}{\overset{:10^3}{\rightleftarrows}} \text{cm}^3 \underset{\times 10^3}{\overset{:10^3}{\rightleftarrows}} \text{dm}^3 \underset{\times 10^3}{\overset{:10^3}{\rightleftarrows}}$	m^3	$\underset{\times 10^3}{\overset{:10^3}{\rightleftarrows}} \text{dam}^3 \underset{\times 10^3}{\overset{:10^3}{\rightleftarrows}} \text{hm}^3 \underset{\times 10^3}{\overset{:10^3}{\rightleftarrows}} \text{km}^3$

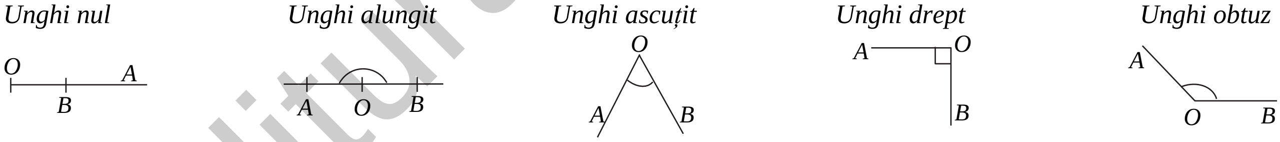
Pentru suprafețe:
$1 \text{ ha} = 100 \text{ ari} = 10\,000 \text{ m}^2$; $1 \text{ ar} = 100 \text{ m}^2$.
Pentru capacitate, unitatea principală este litrul (ℓ).
$1 \text{ dm}^3 = 1\ \ell$; $1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ m}\ell$; $1 \text{ m}^3 = 1000\ \ell$.
Unitatea principală pentru masă este kilogramul (kg).
1 kg = 1000 g; 1 t = 1000 kg; 1 q = 100 kg.
Unitatea principală pentru măsurarea timpului este secunda (s).
1 min = 60 s; 1 h = 60 min; 1 zi = 24 h.

UNGHIUL

Unghi = reuniunea a două semidrepte având aceeași origine.
Unghiurile se măsoară în grade, minute și secunde: $1° = 60'$; $1' = 60''$.

Clasificarea unghiurilor:

Unghi nul | *Unghi alungit* | *Unghi ascuțit* | *Unghi drept* | *Unghi obtuz*



$\sphericalangle AOB = 0°$ | $\sphericalangle AOB = 180°$ | $\sphericalangle AOB < 90°$ | $\sphericalangle AOB = 90°$ | $\sphericalangle AOB > 90°$

Unghiuri congruente = unghiuri care au aceeași măsură.
Bisectoarea unui unghi = semidreapta cu originea în vârful unghiului, situată în interiorul acestuia, care îl împarte în două unghiuri congruente.
Unghiuri adiacente: au același vârf, o latură comună și nu au puncte interioare comune.
Unghiuri complementare: două unghiuri care au suma măsurilor de 90°.
Unghiuri suplementare: două unghiuri care au suma măsurilor de 180°.
Unghiuri opuse la vârf: două unghiuri cu vârful comun și laturile în prelungire.
Două unghiuri opuse la vârf sunt congruente.

Drepte paralele: două drepte coplanare, fără puncte comune.
Drepte perpendiculare: două drepte concurente care formează un unghi drept.

TEME RECAPITULATIVE

TEMA 1. Numere naturale. Numere întregi

1. Calculați:
a) $60 - 40 : 4$; b) $25 - 20 : (13 - 8)$; c) $142 : (1 + 2 \cdot 35)$; d) $12 + 60 : [14 - 2 \cdot (3 + 2)]$.

2. Aflați numărul natural de două cifre care adunat cu suma cifrelor sale dă 54.

3. Suma a două numere naturale este 11. Care este valoarea minimă și valoarea maximă a produsului lor?

4. Determinați toate numerele naturale n, știind că n împărțit la 12 dă câtul 5 și restul un pătrat perfect.

5. Determinați toate numerele naturale care, împărțite la un număr de două cifre, dau câtul 10 și restul 97.

6. Aflați numerele naturale a și b, știind că suma lor este egală cu 19, iar a împărțit la b dă câtul și restul 3.

7. Suma a trei numere naturale este 502. Aflați cele trei numere, știind că al doilea este triplul primului și că, împărțind pe al treilea la al doilea, obținem câtul 7 și restul 2.

8. Determinați numărul $\overline{abc}$, știind că $b = a + 2c$ și $\overline{abc}$ împărțit la 112 dă câtul a și restul 59.

9. Calculați:
a) $2^3 + 3^2 - 4^0$; b) $0^7 + 3^{10} : 3^8 - 9$;
c) $(2^5)^{12} : 2^{56} - 3^{20} : 3^{18}$; d) $25^7 : 5^{14} + 3^{90} : 27^{29}$;
e) $(2 \cdot 2^2 \cdot 2^5)^{10} : 2^{75}$; f) $(2^3 \cdot 3^4)^{12} : (2^{35} \cdot 3^{45})$;
g) $(2^{10} + 2^{11} + 2^{12}) : 2^{10}$; h) $2^5 - 3 \cdot [3 \cdot 7 - 2 \cdot (6^2 - 2^3) : 4] + 1^{123}$.

10. Fie numerele naturale $a = 2^{29} + 2^{40} : 2^{11}$ și $b = 12^{20} : 2^{40}$.
a) Arătați că $a = 2^{30}$. b) Comparați numerele a și b.

11. a) Arătați că numărul natural $a = 5 \cdot 3^{42} + 9^{20} - 10 \cdot 3^{40}$ este pătrat perfect.
b) Demonstrați că numărul natural $b = 3^{42} + 2^{43}$ nu este pătrat perfect.

12. Fie numărul natural $a = 1 + 3 + 3^2 + ... + 3^{10} + 3^{11}$.
a) Arătați că a este număr par. b) Arătați că numărul a este divizibil cu 10.

13. Demonstrați că numărul natural $a = 2^{n+3} \cdot 7^n + 7^{n+1} \cdot 2^n - 3 \cdot 14^n$ se divide cu 12, pentru orice număr natural n.

14. Demonstrați că, dacă $\overline{ab} = 3 \cdot \overline{cd}$, atunci numărul natural $\overline{abcd}$ se divide cu 7.

15. Determinați toate numerele prime p, q, r, știind că $p + 4q + 54r = 392$.

16. a) Descompuneți în factori primi fiecare dintre numerele: 56, 72, 144 și 2700.
b) Câți divizori naturali are numărul 48?

17. Determinați toate valorile posibile ale numărului natural n în fiecare dintre următoarele cazuri:
a) $n = \overline{7x}$ și $2 \mid n$; b) $n = \overline{6xy}$, $2 \mid n$ și $9 \mid n$;
c) $n = \overline{x5y}$, $4 \mid n$ și $3 \mid n$; d) $n = \overline{1xy}$, $5 \mid n$ și suma cifrelor lui n este 8.

18. Calculați cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun pentru următoarele numere:
a) 48, 60; b) 12, 15, 18.

19. Elevii unei clase au cumpărat 168 de mere, 96 de portocale și 72 de banane. Ei vor să facă pachete cu fructe pentru a le oferi unui cămin de bătrâni. Toate pachetele trebuie să fie la fel și să conțină și mere și portocale și banane. Care este cel mai mare număr de pachete pe care pot să le facă elevii?

20. La o florărie, vânzătoarea observă că, dacă grupează toate florile câte 18 și toate florile câte 24, rămân de fiecare dată câte trei flori. Aflați câte flori sunt în florărie, știind că numărul lor este cuprins între 450 și 570.

21. La o ședință de pregătire, antrenorul împarte sportivii în grupe numeric egale (cu cel puțin 2 sportivi) pentru diverse exerciții. Dacă face grupele de câte 6 sportivi, rămân 3 sportivi în afară, dacă face grupele de câte 4, rămâne unul în afară, iar dacă face grupele de câte 9, atunci 6 dintre sportivi nu sunt folosiți. Aflați câți sportivi are antrenorul, știind că numărul lor este mai mic decât 50. Cum ar trebui să facă grupele antrenorul, pentru ca să nu rămână sportivi pe dinafară și numărul grupelor să fie cât mai mare?

22. Sanda a cumpărat CD-uri în valoare de 486 de lei. Unele CD-uri au costat 54 de lei, iar celelalte au costat 90 de lei. Aflați câte CD-uri a cumpărat Sanda.

23. a) Ordonați crescător numerele întregi: 1, –3, 0, –2, –7, 9, 4.
b) Ordonați descrescător numerele întregi: –4, 1, 3, –2, 7, –1, –5.

24. Produsul a trei numere întregi a, b și c este egal cu 8. Aflați cea mai mică valoare posibilă a sumei $a + b + c$.

25. Calculați:

a) $3 \cdot (-5) - (-12)$;
b) $(1 - 2 + 3 - 4) : (-2)$;
c) $(-45) : (3 - 8) + (-2) \cdot 2$;
d) $13 + 24 : (-2)$;
e) $(-1)^4 + 2 \cdot (-1)^3$;
f) $(-2)^2 - (-2)^3 + 3^2$;
g) $2^8 : (-2)^6 - (-5)^0$;
h) $2 - (-3)^4 \cdot 3^5 : (-3)^7$.

26. Un meteorolog a urmărit temperatura medie în șase zile consecutive. În prima zi, temperatura medie a fost de –22°C, iar în fiecare din zilele următoare, temperatura medie a crescut cu câte două grade față de ziua precedentă. Calculați media temperaturilor medii din cele șase zile.

27. Calculați suma tuturor divizorilor întregi ai numărului 288.

28. Determinați toate numerele întregi x cu proprietatea că $x + 1$ divide $2x + 5$.

29. Determinați toate numerele întregi x cu proprietatea că $|x| > 3$ și $|x + 1| \le 6$.

30. Determinați toate perechile ordonate de numere întregi (x, y) cu proprietatea că $xy + x + y = 4$.

TEMA 2. Numere raționale

1. Calculați:

a) $2{,}25 + 3{,}75 - 5$;
b) $4 \cdot 0{,}5 + 5 \cdot (-0{,}2)$;
c) $1{,}4 \cdot 1{,}5 - 4{,}1$;
d) $4{,}35 : 0{,}15 - 140 \cdot 0{,}2$;
e) $\frac{1}{12} - \frac{1}{18} - \frac{1}{9}$;
f) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{12}{5}$;
g) $15 \cdot \left(0{,}5 - \frac{1}{6} + 0{,}6\right)$;
h) $[0{,}5 + 0{,}(3)] : \left[1{,}1(6) - \frac{1}{6}\right]$.

2. Determinați numărul natural n în fiecare dintre următoarele cazuri:

a) fracția $\frac{2n+1}{n+4}$ este subunitară;
b) fracția $\frac{2n}{n+3}$ este echiunitară;
c) fracția $\frac{n+13}{3n+1}$ este supraunitară.

3. Determinați opusul, inversul și modulul numărului rațional $a = -1{,}25$.

4. Stabiliți care dintre următoarele numere raționale se pot reprezenta sub formă de fracție zecimală finită (cu un număr finit de zecimale nenule): $\frac{6}{15}, \frac{11}{2}, \frac{5}{7}, \frac{13}{24}, \frac{8}{15}, \frac{2}{3}, \frac{1}{625}$.

5. a) Ordonați crescător următoarele numere raționale: $-\frac{1}{2}; 1{,}1(3), -0{,}(4); 1{,}7; \frac{4}{3}; -\frac{5}{4}$.

b) Ordonați descrescător următoarele numere raționale: 0,33; 0,(3); 0,3(2); 0,(32); 0,2(3); 0,3.

6. Aflați partea întreagă și partea fracționară ale numerelor $a = \frac{23}{4}$ și $b = -\frac{9}{5}$.

7. Se consideră mulțimea $A = \left\{-\frac{23}{3}; -7; -3{,}4; 0{,}5; 1{,}(2); 2; 5\right\}$. Determinați mulțimile $A \cap \mathbb{N}$, $A \cap \mathbb{Z}$, $A \cap (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})$.

8. Fie numerele raționale $a = 30 - 5 \cdot [40 : (-8) - 2 \cdot (5 - 10)]$ și $b = 3 + 6 \cdot \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{7}\right) : \left(-\frac{22}{7}\right)\right]$. Arătați că $a = 5b$.

9. Se consideră numărul $a = \frac{360}{59} \cdot \left(\frac{1}{45} + \frac{7}{60} + \frac{1}{40}\right)$. Calculați $(a - 2)^{10}$.

10. Fie $a = \left[\frac{1}{30} + \frac{1}{19} \cdot (0{,}(6) + 0{,}6)\right] : 0{,}01$. Arătați că a este un număr natural.

11. Se consideră numărul rațional $a = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{8 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 10}$. Arătați că $0{,}8 < a < 1$.

TEMA 7. Ecuații. Sisteme de ecuații. Inecuații

1. a) Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției „3 este soluție a ecuației $6 - x = 1$, $x \in \mathbb{N}$".

b) Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției „–2 este soluție a ecuației $x + 3 = 1$, $x \in \mathbb{N}$".

2. Rezolvați ecuațiile:

a) $x + 1 = 7$, $x \in \mathbb{N}$;
b) $x - 2 = -3$, $x \in \mathbb{Z}$;
c) $3{,}25 + x = 1{,}65$, $x \in \mathbb{Q}$;
d) $13{,}2 - x = 0{,}65$, $x \in \mathbb{Q}$;
e) $x \cdot 3 = -6$, $x \in \mathbb{Z}$;
f) $(-8) : x = -4$, $x \in \mathbb{Z}$;
g) $x : 1{,}1 = 3$, $x \in \mathbb{R}$;
h) $1{,}2 : x = 3$, $x \in \mathbb{Q}$.

3. Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuațiile:

a) $\frac{3x-1}{4} - \frac{5x-2}{7} = \frac{3}{14}$;
b) $2(x + 2)^2 - (x - 1)^2 = x(x - 3) - 6$;
c) $\frac{2x+1}{3x-2} = \frac{2x+5}{3x+1}$;
d) $\frac{2x-1}{6x-3} = \frac{4x+4}{12x-5}$;
e) $\frac{1}{2x-2} + \frac{1}{3x-3} + \frac{1}{6x-6} = \frac{1}{x-1}$;
f) $(x + 2)^2 + \frac{x^2-9}{x+3} = (x - 1)(x + 1) - 13$.

4. Considerăm $a, b, x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $\begin{cases} (a-1)x + (b+1)(y+1) = -5 \\ 2a(x+1) - (2b-1)y = 22 \end{cases}$.

a) Determinați x și y dacă $a = 2$, $b = -3$.
b) Determinați a și b dacă $x = 1$, $y = 2$.

5. a) Care dintre elementele mulțimii $\left\{-1, 1, \frac{3}{2}\right\}$ este soluție a inecuației $x - 1{,}25 > 0$, $x \in \mathbb{R}$?

b) Care dintre elementele mulțimii $\{-3, 1, 2, 3\}$ nu este soluție a inecuației $2x^2 - 1 < 17$, $x \in \mathbb{R}$?

6. Rezolvați inecuațiile:

a) $x - 1 < 3$, $x \in \mathbb{N}$;
b) $5x > 30{,}15$, $x \in \mathbb{Z}$;
c) $-1{,}2x + 0{,}8 < -1{,}6$, $x \in \mathbb{Z}$;
d) $2x - 3 > 1 + 3x$, $x \in \mathbb{R}$;
e) $6 - 2x < 4$, $x \in \mathbb{R}$;
f) $\frac{x}{3} + 1 > x + \frac{1}{2}$, $x \in \mathbb{N}$.

7. Fie a număr real și inecuația $\frac{2x-1}{3} + \frac{x}{2} \le \frac{a-1}{6}$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Determinați valorile lui a pentru care $x = 1$ este soluție a inecuației.
b) Determinați numerele naturale x care verifică inecuația pentru $a = 6$.

8. a) Determinați valorile întregi ale lui x pentru care $\frac{4x}{3x+1}$ este număr întreg.

b) Arătați că există o infinitate de numere raționale x, pentru care numărul $\frac{4x}{3x+1}$ este întreg.

9. După trei note primite la matematică, media aritmetică a notelor unui elev este 7.
a) Dacă a patra notă este 5, care este media aritmetică a primelor patru note?
b) Dacă media primelor patru note este 7,50, care este a patra notă primită de elev?

10. Un televizor costă 1540 de lei. Prețul televizorului se mărește cu 25%.
a) Cât costă televizorul după mărirea de preț?
b) Cu ce procent trebuie micșorat noul preț pentru ca televizorul să aibă același preț ca înainte de mărire?

23. Trei frați au împreună 180 de lei. După ce primul a cheltuit $\frac{1}{2}$ din suma sa, al doilea $\frac{2}{3}$ din suma sa, iar al treilea $\frac{3}{4}$ din suma sa, cei trei au rămas cu sume egale de bani. Notăm cu a, b, c (lei) sumele de bani pe care le aveau, la început, primul, al doilea, respectiv al treilea copil.
a) Arătați că a, b, c sunt direct proporționale cu 2, 3 și 4.
b) Ce sumă de bani avea fiecare copil la început?

24. Numerele 319, 945 și 333, împărțite la un număr natural n, dau resturile 7, 9 și, respectiv, 8.
a) Stabiliți dacă n poate fi egal cu 12.
b) Determinați numărul n.

25. Împărțind numărul natural n la numerele 18, 30 și 24, se obțin câturi nenule și de fiecare dată restul 2.
a) Aflați cel mai mic număr n cu această proprietate.
b) Aflați toate numerele n cu această proprietate, astfel încât $1500 < n < 2500$.

26. Într-un coș se află nuci. Dacă le grupăm câte 2, câte 3 sau câte 5, de fiecare dată rămâne o nucă, iar dacă le grupăm câte 7, nu mai rămâne nicio nucă.
a) Pot fi în coș 301 nuci?
b) Care este numărul minim de nuci din coș?

27. Într-o clasă sunt băieți și fete. Dacă ar mai veni 8 fete, numărul lor ar fi $\frac{2}{3}$ din numărul băieților. Dacă ar pleca n băieți, numărul fetelor ar fi tot $\frac{2}{3}$ din numărul băieților.
a) Determinați numărul n.
b) Arătați că sunt cel puțin 12 băieți în clasă.

28. Un amestec de apă și sare cântărește 10 kg și are concentrația de 5%.
a) Ce cantitate de sare conține amestecul?
b) Ce cantitate de sare trebuie adăugată pentru a obține un amestec cu concentrația de 20%?
c) Dacă s-ar adăuga 30 kg de amestec de apă cu sare, cu concentrația de 10%, care ar fi concentrația noului amestec?

29. La o disciplină, Ionuț are trei note: 5, 7 și 8.
a) Care este media aritmetică a notelor lui Ionuț?
b) Ce notă ar trebui să mai primească Ionuț pentru ca media să fie cel puțin 7?

30. Un test-grilă conține 100 de întrebări. Pentru fiecare răspuns corect se acordă 5 puncte și pentru fiecare răspuns greșit se scad 3 puncte. Se consideră admis un elev care obține cel puțin 200 de puncte.
a) Este admis un elev care răspunde corect la 50 de întrebări?
b) Care este numărul minim de răspunsuri corecte pe care trebuie să le dea un elev pentru a fi admis?

TEMA 8. Unghiuri. Triunghiuri. Patrulatere

1. În figura 1, punctele A, B și C sunt coliniare în această ordine. Se știe că $7AB = 2BC$, iar $AC = 27$ cm. Aflați lungimea segmentului AB.

2. În figura 2, M este un punct situat pe segmentul AB, iar N și P sunt mijloacele segmentelor AM, respectiv MB. Segmentul NP are lungimea de 17 cm. Aflați lungimea segmentului AB.

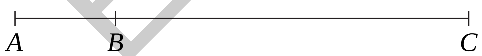


Figura 1

Figura 2

3. În figura 3, semidreptele AM și AN sunt bisectoarele unghiurilor BAC, respectiv MAC. Unghiul MAN are măsura de 20°. Aflați măsura unghiului BAN.

4. În figura 4, $\sphericalangle BAC$ și $\sphericalangle CAD$ sunt unghiuri adiacente complementare, cu $\sphericalangle BAC = \frac{5}{4} \cdot \sphericalangle CAD$. Aflați măsura unghiului CAD.

5. În figura 5 sunt date măsurile a două dintre unghiurile formate în jurul punctului de intersecție a dreptelor d_1 și d_2. Aflați valoarea lui x.

28. Postamentul unei statui este construit din beton sub forma trunchiului de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ având $AA' = 3$ m, $AC = 6$ m și $A'C' = 2{,}4$ m (figura 17).
a) Aflați înălțimea postamentului.
b) Demonstrați că la construcția postamentului se folosesc mai mult de 22 m^3 de beton.

29. O foaie de tablă are forma hexagonului regulat $ABCDEF$ cu latura de 60 cm (figura 18). Notăm cu M, N, P mijloacele laturilor AB, CD, respectiv EF și îndoim tabla după dreptele MN, NP și PM. Se obține astfel un vas fără capac, având forma unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată.
a) Aflați suprafața foii folosite pentru confecționarea vasului.
b) Determinați capacitatea vasului.

30. O lumânare decorativă are forma unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ (figura 19). Se știe că 13 cm^3 de materialul din care este făcută lumânarea cântăresc 10 g. Muchiile bazelor trunchiului sunt $AB = 15$ cm și $A'B' = 6$ cm, iar înălțimea sa este $OO' = 9$ cm. Arătați că masa lumânării este mai mică de 405 g.

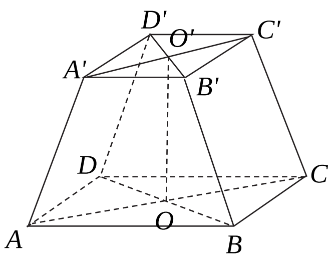


Figura 16

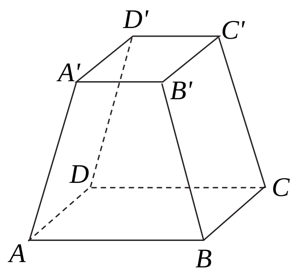


Figura 17

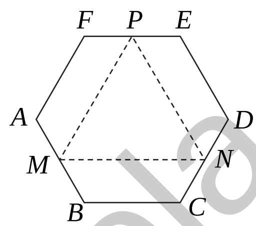


Figura 18

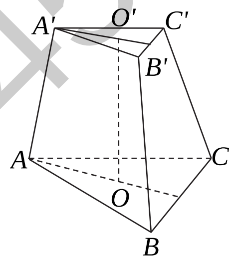


Figura 19

TEMA 14. Corpuri rotunde

1. Pătratul $ABCD$, cu $AB = 10$ cm, este secțiunea axială a unui vas cilindric circular drept (figura 1). Se toarnă în vas 157 ml de apă. Determinați înălțimea la care se ridică apa. (Se va considera valoarea aproximativă $\pi = 3{,}14$.)

2. Un cilindru metalic are raza de 6 cm și înălțimea de 25 cm (figura 1). Se cunoaște că 3 cm^3 de metal cântăresc 5 g. Arătați că masa cilindrului este mai mare de 4,7 kg.

3. O piesă metalică are forma unui cilindru circular drept având diametrul bazei de 14 cm și generatoarea de 12,5 cm (figura 1). Se vopsește suprafața laterală a piesei utilizând câte trei grame de vopsea la fiecare 5 cm^2 de suprafață.
a) Arătați că 330 g vopsea sunt suficiente pentru a vopsi piesa.
b) Se scufundă piesa într-un vas mai mare, plin cu apă. Demonstrați că din vas vor curge mai puțin de 2 ℓ de apă.

(Se va utiliza valoarea aproximativă $\pi = 3\frac{1}{7}$.)

4. În figura 2, dreptunghiul AA_1D_1D, cu $AA_1 = 12$ dm și $AD = 10$ dm reprezintă desfășurarea suprafeței laterale a unui cilindru.
a) Aflați aria laterală a cilindrului.
b) Determinați volumul cilindrului.

5. O doză de suc are forma unui cilindru circular drept cu volumul egal cu 90π cm^3 și generatoarea de 10 cm (figura 3). Dreptunghiul $ABCD$ este o secțiune axială a cilindrului, iar E este un punct pe segmentul BC, astfel încât $CE = 3$ cm.
a) Aflați lungimea razei bazei.
b) O furnică se deplasează pe suprafața laterală a dozei, din punctul A în punctul E, pe un drum de lungime minimă. Demonstrați că lungimea drumului este mai mică de 12 cm.

6. O piesă din lemn având forma unui cilindru circular drept cu $\mathcal{A}_l = 560\pi$ cm^2 și $\mathcal{A}_t = 760\pi$ cm^2 se cioplește, transformându-se într-o prismă patrulateră regulată $ABCDA_1B_1C_1D_1$, cu pierderi minime de material (figura 4).
a) Aflați lungimea generatoarei cilindrului.
b) Determinați volumul de lemn pierdut prin cioplire.

(Se va utiliza valoarea aproximativă $\pi = \frac{22}{7}$.)

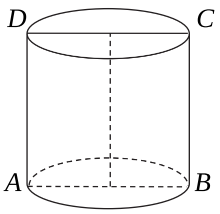


Figura 1

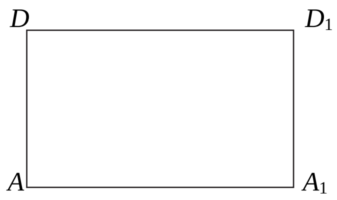


Figura 2

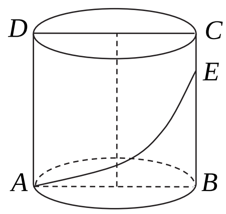


Figura 3

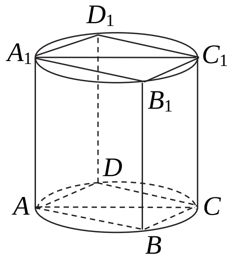


Figura 4

7. Triunghiul echilateral *VAB* este o secțiune axială a unui con circular drept (figura 5). Aria triunghiului *VAB* este $9\sqrt{3}$ cm^2. Aflați aria laterală a conului.

8. Un comerciant vinde popcorn în cornete de hârtie având formă de con circular drept cu generatoarea $VA = 12{,}5$ cm și înălțimea $VO = 12$ cm (figura 6).

a) Aflați numărul maxim de cornete care pot fi confecționate dintr-un metru pătrat de hârtie.

b) Se știe că 56 cm^3 de popcorn cântăresc 40 g. Aflați masa unei cornet plin.

(Se va considera valoarea aproximativă $\pi = 3\frac{1}{7}$.)

9. Prin înfășurarea unei foi de tablă având forma unui sector de disc cu unghiul la centru $\alpha = 120°$ se obține un vas în formă de con circular drept cu înălțimea de 20 cm (figura 7).

a) Aflați raza bazei conului.

b) Stabiliți dacă încape 1 litru de apă în vasul obținut.

10. În figura 8 este reprezentată o pâlnie așezată pe o masă orizontală. Triunghiul *VAB* este o secțiune axială a conului, raza bazei conului este de 6 cm și aria laterală este egală cu 72π cm^2.

a) Arătați că înălțimea pâlniei este mai mică decât 10,5 cm.

b) O furnică se deplasează din punctul *A* în punctul *B* pe suprafața laterală. Aflați lungimea minimă a drumului furnicii.

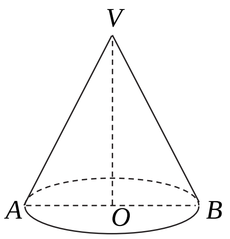


Figura 5

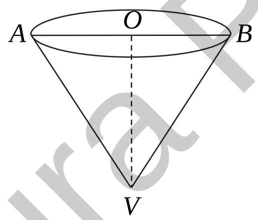


Figura 6

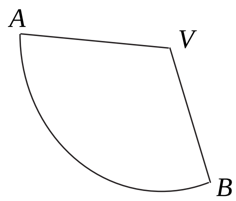


Figura 7

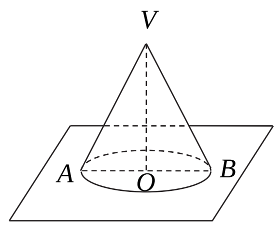


Figura 8

11. Pentru a vopsi un con din lemn, avem nevoie de 459 g de vopsea. La o treime din înălțime față de vârf se realizează o secțiune paralelă cu planul bazei. Ce cantitate de vopsea este necesară pentru a acoperi conul mic format?

12. Un con circular drept din lemn are $\mathcal{A}_l = 135\pi$ cm^2 și $\mathcal{A}_t = 216\pi$ cm^2 (figura 5).

a) Aflați înălțimea conului.

b) Secționăm conul printr-un plan paralel cu planul bazei, astfel încât volumul trunchiului obținut să fie de 7 ori mai mare decât volumul conului mic. La ce distanță de planul bazei se realizează secțiunea?

13. O găleată are forma unui trunchi de con circular drept, cu razele bazelor $r = 15$ cm, $R = 20$ cm și înălțimea $h = 36$ cm (figura 9). Poate fi umplută găleata, într-un minut, de un robinet care are debitul de 0,5 ℓ/s?

14. Un pahar de unică folosință are forma unui trunchi de con circular drept cu raza bazei mari $R = 5{,}5$ cm, înălțimea $h = 12$ cm și generatoarea $g = 12{,}5$ cm (figura 10).

a) Aflați raza bazei mici a trunchiului.

b) Stabiliți dacă încap în pahar 500 ml de suc.

15. Un buștean are forma unui trunchi de con circular drept, iar trapezul isoscel *ABCD* este o secțiune axială a sa (figura 11). Generatoarea are lungimea de 12 dm și formează cu planul bazei mari un unghi cu măsura de 60°. Diametrul bazei mici este $DC = 4$ dm.

a) Arătați că înălțimea bușteanului este mai mică de 11 dm.

b) Determinați la ce distanță de planul bazei mici se întâlnesc generatoarele *AD* și *BC*.

MODELE DE TESTE PENTRU
EVALUAREA NAȚIONALĂ

✦ TESTUL 1 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Cel mai mare număr natural care împărțit la 7 dă câtul 10 este egal cu:
a) 70; **b)** 71; **c)** 76; **d)** 77.

(5p) **2.** Un telefon care costă 1000 de lei se ieftinește cu 10%, iar noul preț se mărește cu 10%. Diferența dintre prețul inițial și prețul final al telefonului este egală cu:
a) 0 lei; **b)** 1 leu; **c)** 10 lei; **d)** 20 de lei.

(5p) **3.** Diferența dintre cel mai mic și cel mai mare număr întreg din intervalul (–3, 5] este egală cu:
a) –8; **b)** –7; **c)** –6; **d)** 2.

(5p) **4.** Dintre următoarele șiruri de numere, cel scris în ordine crescătoare este:
a) $\frac{2}{3}; 0,5; \frac{5}{6}; 0,75;$ **b)** $\frac{5}{6}; 0,5; 0,75; \frac{2}{3};$ **c)** $0,5; 0,75; \frac{2}{3}; \frac{5}{6};$ **d)** $0,5; \frac{2}{3}; 0,75; \frac{5}{6}.$

(5p) **5.** Patru elevi, Ana, Bogdan, Cristi și Dana, au calculat rădăcina pătrată a produsului numerelor $\sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{8}$ și $\sqrt{15}$. Rezultatele obținute de ei sunt trecute în tabelul următor:

Ana	**Bogdan**	**Cristi**	**Dana**
$2\sqrt{15}$	$10\sqrt{6}$	60	3600

Dintre cei patru elevi, cel care a obținut rezultatul corect este:
a) Ana; **b)** Bogdan; **c)** Cristi; **d)** Dana.

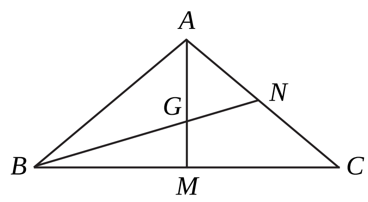
(5p) **6.** Teodor a parcurs într-o zi 24 km, adică $\frac{3}{5}$ din drumul pe care trebuia să-l străbată. Sora lui Teodor spune că lungimea totală a drumului pe care îl avea de parcurs Teodor este de 40 km. Afirmația surorii este:
a) adevărată; **b)** falsă.

SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

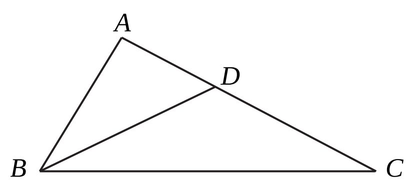
(5p) **1.** În figura alăturată sunt reprezentate punctele *A*, *B*, *C*, coliniare, în această ordine. Punctul *M* este mijlocul segmentului *AB*, iar punctul *N* se află pe segmentul *BC*, astfel încât *BN* = 2*NC*. Dacă *AB* = 6 cm și *BC* = 12 cm, atunci lungimea segmentului *MN* este egală cu:

a) 6 cm; **b)** 9 cm; **c)** 11 cm; **d)** 15 cm.

(5p) **2.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul *ABC* cu *AB* = *AC* = = 10 cm și *BC* = 16 cm. Medianele *AM* și *BN* se intersectează în punctul *G*. Lungimea segmentului *AG* este egală cu:
a) 10 cm; **b)** 8 cm;
c) 6 cm; **d)** 4 cm.

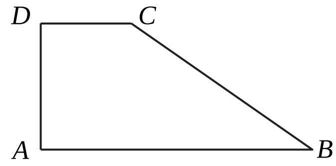


(5p) **3.** În figura alăturată este desenat un triunghi *ABC* cu $\sphericalangle A = 90°$, $\sphericalangle C = 30°$ și $AC = 6\sqrt{3}$ cm. Dacă *BD* este bisectoarea unghiului *ABC*, atunci lungimea segmentului *AD* este egală cu:
a) $2\sqrt{3}$ cm; **b)** $3\sqrt{3}$ cm;
c) $4\sqrt{3}$ cm; **d)** $5\sqrt{3}$ cm.



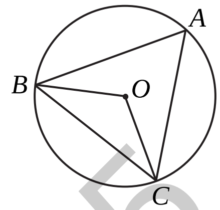
(5p) **4.** În figura alăturată este reprezentat trapezul $ABCD$, cu $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90°$, $AB = 6$ m, $BC = 5$ m și $CD = 2$ m. Aria trapezului $ABCD$ este egală cu:

a) $40\ m^2$; **b)** $24\ m^2$;
c) $12\ m^2$; **d)** $6\ m^2$.



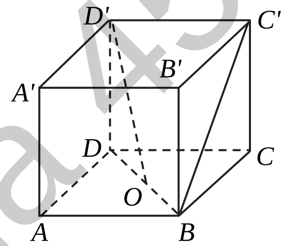
(5p) **5.** În figura alăturată este desenat triunghiul ABC înscris în cercul cu centrul în O. Dacă $\sphericalangle BOC = 150°$, atunci măsura unghiului BAC este egală cu:

a) 90°; **b)** 75°;
c) 60°; **d)** 45°.



(5p) **6.** În figura alăturată este desenat cubul $ABCDA'B'C'D'$. Punctul O este mijlocul segmentului BD. Măsura unghiului determinat de dreptele BC' și $D'O$ este egală cu:

a) 15°; **b)** 30°;
c) 45°; **d)** 60°.



SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Un biciclist a parcurs un drum în trei zile. În prima zi, el a parcurs cu 5 km mai puțin decât $\frac{1}{3}$ din lungimea drumului, a doua zi cu 15 km mai mult decât $\frac{1}{3}$ din rest, iar a treia zi ultimii 55 km.

(2p) **a)** Este posibil ca biciclistul să fi parcurs în prima zi 13 km? Justifică răspunsul dat.

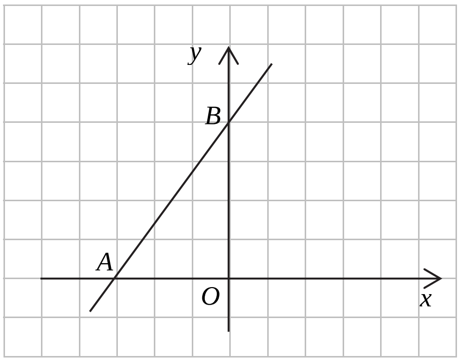
(3p) **b)** Determină lungimea totală a drumului.

2. Se consideră expresia $E(x) = (3x - 2)^2 - (x - 2)^2 + (x - 1)(x + 1) - 2x(4x - 1)$, unde x este număr real.

(2p) **a)** Calculează $E(2)$.

(3p) **b)** Demonstrează că $E(x) \geq -10$, pentru orice număr real x.

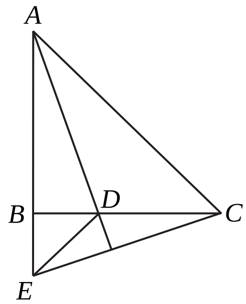
3. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{4x+12}{3}$. Fie A și B punctele de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axele Ox, respectiv Oy, ale sistemului de axe ortogonale xOy.



(2p) **a)** Determină coordonatele punctelor A și B.

(3p) **b)** Determină coordonatele punctului P, situat pe graficul funcției f, astfel încât $AB = BP$.

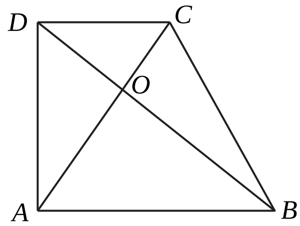
4. În figura alăturată sunt reprezentate triunghiurile dreptunghice isoscele ABC și DBE, cu $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DBE = 90°$, punctul D fiind situat pe BC. Se știe că $BC = 3BD = 12$ cm.



(2p) **a)** Calculează aria triunghiului ADC.

(3p) **b)** Demonstrează că dreptele AD și EC sunt perpendiculare.

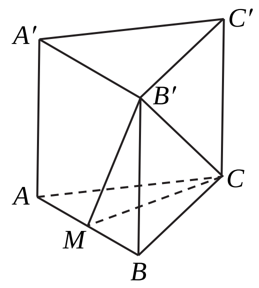
5. În figura alăturată este reprezentat trapezul $ABCD$, cu baza mare $AB = 16$ cm, baza mică $CD = 9$ cm și înălțimea $AD = 12$ cm. Diagonalele trapezului se intersectează în punctul O.



(2p) **a)** Calculează lungimea segmentului AO.

(3p) **b)** Demonstrează că diagonalele trapezului sunt perpendiculare.

6. În figura alăturată este reprezentată prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ cu $AB = 12$ cm și $BB' = 8$ cm. Punctul M este mijlocul laturii AB.



(2p) **a)** Calculează aria triunghiului CMB'.

(3p) **b)** Determină distanța de la punctul A la planul (CMB').

✦ TESTUL 39 ✦

SUBIECTUL I. *Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.* **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Numărul perechilor ordonate (x, y) pentru care numărul $\overline{1xy}$ se divide cu 2 și cu 9 este:
a) 4; **b)** 5; **c)** 6; **d)** 7.

(5p) **2.** În tabelul de mai jos sunt prezentate prețurile a patru produse, înainte și după o ieftinire.

Produsul	A	B	C	D
Prețul inițial	200 de lei	1000 de lei	80 de lei	250 de lei
Prețul redus	180 de lei	950 de lei	56 de lei	200 de lei

Cel mai mare procent cu care s-a redus prețul unuia dintre cele patru produse este:
a) 20%; **b)** 30%; **c)** 40%; **d)** 50%.

(5p) **3.** Rezultatul calculului $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - 10$ este:
a) –55; **b)** –10; **c)** –5; **d)** 0.

(5p) **4.** Cel mai mic numitor comun al fracțiilor $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{12}$ și $\frac{1}{15}$ este:
a) 10; **b)** 30; **c)** 60; **d)** 120.

(5p) **5.** În tabelul alăturat sunt înscrise patru valori ale numărului $\overline{ab}$. Dintre aceste valori, cea pentru care numărul $\sqrt{\overline{ab}+\overline{ba}}$ nu aparține lui $\mathbb{N}$ este:

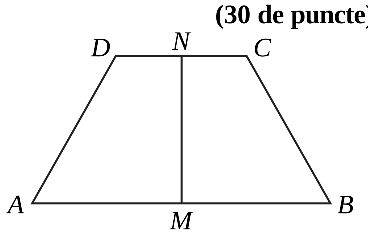
$\overline{ab}$	I	II	III	IV
	16	38	56	92

a) I; **b)** II; **c)** III; **d)** IV.

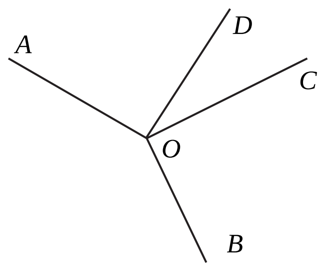
(5p) **6.** Apa plată *Armonia* se vinde doar în pachete de 6, 12 sau 24 de sticle. Propoziția: „Trebuie să cumpărăm minim 6 pachete pentru a avea exact 90 de sticle de apă plată *Armonia*." este:
a) adevărată; **b)** falsă.

SUBIECTUL al II-lea. *Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.* **(30 de puncte)**

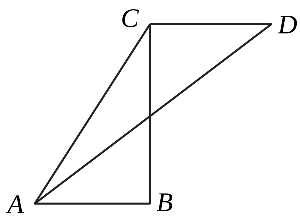
(5p) **1.** În figura alăturată, *ABCD* este un trapez isoscel, iar *M* și *N* sunt mijloacele bazelor *AB*, respectiv *CD*. Dreapta *MN* este:
a) linia mijlocie a trapezului *ABCD*;
b) paralelă cu latura *AD*;
c) mediatoarea segmentului *AB*;
d) perpendiculară pe latura *BC*.



(5p) **2.** În figura alăturată sunt reprezentate unghiurile *AOB*, *BOC*, *COD* și *DOA*, formate în jurul punctului *O*, astfel încât $\sphericalangle AOD = \sphericalangle BOC = 90°$. Dacă $\sphericalangle AOB = 5 \cdot \sphericalangle DOC$, atunci măsura unghiului *DOC* este egală cu:
a) 30°; **b)** 45°;
c) 50°; **d)** 60°.

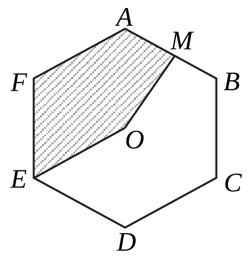


(5p) **3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul dreptunghic *ABC* cu ipotenuza $AC = 25$ cm, cateta $AB = 7$ cm, iar *D* este simetricul punctului *A* față de mijlocul segmentului *BC*. Aria triunghiului *DCA* este egală cu:
a) 168 cm^2; **b)** 84 cm^2;
c) 42 cm^2; **d)** 62 cm^2.



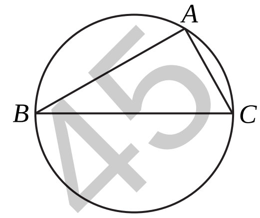
(5p) **4.** În figura alăturată este reprezentat un hexagon regulat $ABCDEF$ cu centrul în O și latura AB = 2 m. Punctul M este mijlocul laturii AB. Aria suprafeței hașurate este aproximativ:

a) 1 m^2; **b)** 2 m^2;
c) 3 m^2; **d)** 4 m^2.



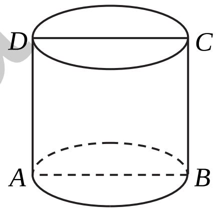
(5p) **5.** În figura alăturată este desenat triunghiul ABC cu AB = 10 cm, BC = 12,5 cm, CA = 7,5 cm și cercul său circumscris. Lungimea cercului este egală cu:

a) 10π cm; **b)** 12π cm;
c) 12,5π cm; **d)** 14π cm.



(5p) **6.** Secțiunea axială a unui cilindru circular drept este un pătrat $ABCD$ având perimetrul egal cu 16 cm. Aria totală a cilindrului este egală cu:

a) 48π cm^2; **b)** 24π cm^2;
c) 16π cm^2; **d)** 32π cm^2.



SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. La un concurs de șah, primii trei concurenți au obținut împreună 35 de puncte. Primul clasat are cu un punct mai mult decât al doilea, iar al treilea are cu jumătate de punct mai puțin decât al doilea.

(2p) **a)** Este posibil ca primul clasat să aibă 12 puncte? Justifică răspunsul dat.

(3p) **b)** Determină câte puncte are fiecare dintre cei trei concurenți.

2. Se consideră expresia $E(x) = \left(\frac{x^3-2x^2}{2x^2}-\frac{x^2-4}{4x}\right):\frac{x-2}{2}+\frac{1}{2}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$.

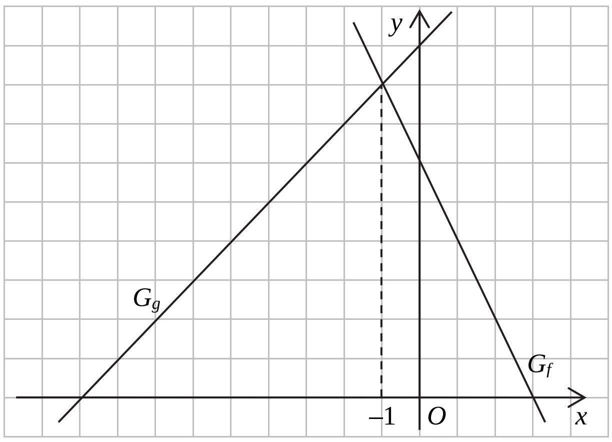
(2p) **a)** Arată că $E(x) = 1 - \frac{1}{x}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$.

(3p) **b)** Calculează $E(3) \cdot E(4) \cdot E(5) \cdot E(6) \cdot E(7) \cdot E(8)$.

3. Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 6 - 2x$ și $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x + m$.

(2p) **a)** Găsește coordonatele punctelor de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axele sistemului de coordonate xOy.

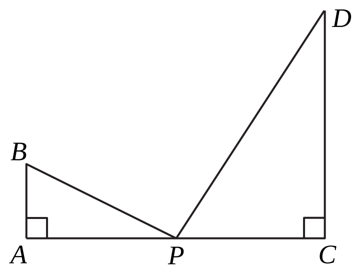
(3p) **b)** Determină constanta m, știind că reprezentările grafice ale celor două funcții se intersectează într-un punct de abscisă –1.



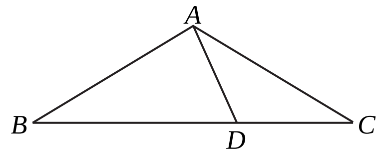
4. În figura alăturată sunt reprezentate schematic două turnuri AB și CD. Din punctul P, mijlocul segmentului AC, cele două turnuri se văd sub unghiurile $\sphericalangle APB = 30°$ și $\sphericalangle CPD = 60°$. Se știe că AB și CD sunt perpendiculare pe AC și AB = 12 m.

(2p) **a)** Arată că lungimea segmentului AP este mai mică de 21 m.

(3p) **b)** Calculează înălțimea turnului CD.



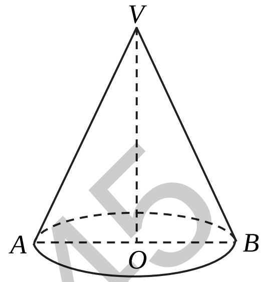
5. Triunghiul isoscel ABC din figura alăturată are $\sphericalangle BAC = 120°$ și $AB =$ $= 10$ cm. Punctul D aparține laturii BC, astfel încât $DA = DC$.



(2p) **a)** Determină măsura unghiului BAD.

(3p) **b)** Calculează valoarea produsului $CD \cdot CB$ (considerând lungimile segmentelor exprimate în centimetri).

6. În figura alăturată este desenat un con circular drept cu perimetrul secțiunii axiale VAB egal cu 16 cm și înălțimea VO ($O \in AB$). Cosinusul unghiului format de generatoarea VA cu planul bazei conului este de $\frac{3}{5}$.



(2p) **a)** Arată că $OA = 3$ cm și $VO = 4$ cm.

(3p) **b)** Se secționează conul cu un plan paralel cu baza, astfel încât volumul trunchiului de con format să fie de 7 ori mai mare decât volumul conului mic. Află distanța de la vârful conului la planul de secțiune.

✦ TESTUL 40 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Scrierea numărului 144 ca produs de puteri de numere prime distincte este:
a) $2^4 \cdot 9$; **b)** $9 \cdot 16$; **c)** $2^4 \cdot 3^3$; **d)** $2^4 \cdot 3^2$.

(5p) **2.** La un concurs s-au acordat mai multe diplome conform tabelului următor:

Diploma	Premiul I	Premiul al II-lea	Premiul al III-lea	Mențiune
Număr elevi	3	6	9	18

Dacă numărul premiilor reprezintă p% din numărul total de diplome acordate, atunci p este egal cu:
a) 30; **b)** 40; **c)** 50; **d)** 60.

(5p) **3.** Roma Antică a fost un oraș-stat a cărui istorie începe în anul 753 î.Hr. și se sfârșește în anul 476 d.Hr. Existența Romei Antice s-a întins pe o perioadă de:
a) 277 ani; **b)** 476 ani; **c)** 753 ani; **d)** 1229 ani.

(5p) **4.** Opusul numărului $a = \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right):\left(-\frac{1}{24}\right)$ este:

a) -10; **b)** $-\frac{1}{2}$; **c)** $\frac{5}{6}$; **d)** 2.

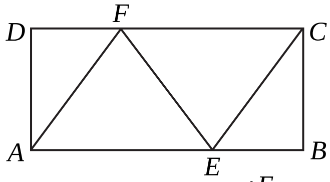
(5p) **5.** Patru eleve au primit ca temă să efectueze operațiile indicate în tabelul de mai jos.

Ana	$x = \sqrt{2}+\sqrt{3}$	$y = \sqrt{2}-\sqrt{3}$	$x - y$
Maria	$x = 3\sqrt{2}$	$y = -\sqrt{18}$	$x + y$
Ioana	$x = \sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{8}}$	$y = \sqrt{2}$	$x \cdot y$
Sabina	$x = 2\sqrt{6}$	$y = 5\sqrt{3}$	$x : y$

Dacă operațiile s-au efectuat corect, atunci elevele care au obținut ca rezultat un număr rațional sunt:
a) Maria și Ioana; **b)** Ana și Ioana; **c)** Maria și Sabina; **d)** Ana și Sabina.

(5p) **6.** Iustina și Elena merg la același bazin de înot. Iustina poate înota 10 lungimi de bazin în 25 de minute, iar Elena poate înota 12 lungimi de bazin în 32 de minute. Afirmația că Elena înoată mai repede decât Iustina este:
a) adevărată; **b)** falsă.

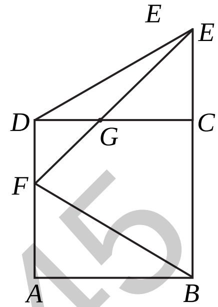
4. În figura alăturată sunt reprezentate dreptunghiul $ABCD$, cu laturile $AB = 16$ cm și $BC = 12$ cm, și rombul $AECF$, ale cărui vârfuri E și F se află pe segmentele AB, respectiv CD.



(2p) **a)** Demonstrează că patrulaterul $BEDF$ este paralelogram.

(3p) **b)** Află lungimea segmentului EF.

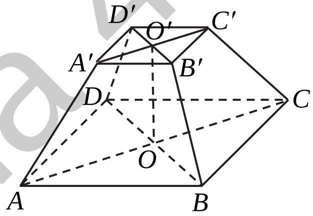
5. În figura alăturată este desenat pătratul $ABCD$. Punctul E se află pe prelungirea laturii BC, astfel încât măsura unghiului CDE este 30°, iar punctul F aparține laturii AD, astfel încât măsura unghiului FBE este 60°.



(2p) **a)** Demonstrează că $AF = CE$.

(3p) **b)** Arată că $DG = (\sqrt{3}-1)GC$, unde G este punctul de intersecție a dreptelor CD și EF.

6. În figura alăturată este reprezentat trunchiul de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$, cu baza mare $ABCD$, $AB = 16$ cm și baza mică $A'B'C'D'$, $A'B' = 8$ cm. Înălțimea trunchiului este $OO' = 4\sqrt{22}$ cm.



(2p) **a)** Arată că muchia laterală a trunchiului, AA', este egală cu $8\sqrt{6}$ cm.

(3p) **b)** Află măsura unghiului determinat de dreptele AA' și BC'.

✦ TESTUL 82 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $|-3| + 12 : (-4)$ este egal cu:

a) –6; **b)** 0; **c)** 6; **d)** 1.

(5p) **2.** Dacă $\frac{a+b}{b} = 2\frac{1}{3}$, cu $b \neq 0$, atunci raportul $\frac{a}{b}$ este egal cu:

a) $\frac{3}{4}$; **b)** $\frac{7}{3}$; **c)** $\frac{4}{3}$; **d)** 1.

(5p) **3.** Fie x_1 și x_2 soluțiile ecuației $4x^2 - 8x + 3 = 0$. Atunci $|x_1 - x_2|$ este:

a) –1; **b)** 1; **c)** 2; **d)** $\frac{3}{2}$.

(5p) **4.** Dintre numerele 1, $-\frac{4}{5}$, $\frac{1}{2}$ și $-\frac{1}{3}$, cel mai apropiat de 0 pe axa numerelor este:

a) $-\frac{1}{3}$; **b)** $\frac{1}{2}$; **c)** $-\frac{4}{5}$; **d)** 1.

(5p) **5.** Ana, Bogdan, Cezara și Darius au avut de calculat media aritmetică a numerelor $x = \left(\frac{17}{34}+\frac{13}{39}+\frac{11}{66}\right):\sqrt{2}^{-1}$ și $y = 1-\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$. Rezultatele obținute sunt trecute în tabelul următor.

Ana	**Bogdan**	**Cezara**	**Darius**
$2\sqrt{2}-2$	$\sqrt{2}-1$	2	1

Rezultatul corect a fost obținut de:

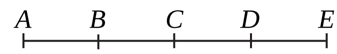
a) Bogdan; **b)** Ana; **c)** Darius; **d)** Cezara.

(5p) **6.** Marius afirmă: „Cubul cu latura de 6 cm are volumul egal cu aria totală”. Afirmația lui Marius este:

a) adevărată; **b)** falsă.

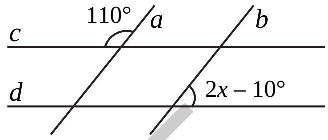
SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** În figura alăturată sunt reprezentate punctele coliniare A, B, C, D, E, în această ordine, astfel încât $AB = BC = CD = DE$. Numărul grupelor de câte trei puncte, alese dintre punctele anterioare, pentru care unul este mijlocul segmentului cu capetele în celelalte două puncte este:



a) 2; **b)** 3;
c) 4; **d)** 5.

(5p) **2.** În figura alăturată se știe că $a \parallel b$ și $c \parallel d$. Valoarea lui x este:

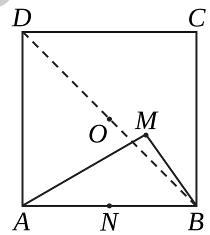


a) 70; **b)** 40;
c) 35; **d)** 60.

(5p) **3.** În figura alăturată triunghiul ABC este dreptunghic în B. Dacă $\sphericalangle C = 30°$, $AB = 12$ cm și M este proiecția punctului B pe bisectoarea $\sphericalangle BAC$, atunci distanța de la punctul M la dreapta BC este egală cu:

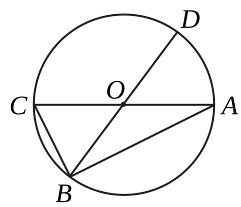
a) 6 cm; **b)** $6\sqrt{3}$ cm;
c) 3 cm; **d)** $3\sqrt{3}$ cm.

(5p) **4.** În figura alăturată este reprezentat pătratul $ABCD$, având latura de 6 cm, N este mijlocul laturii AB, iar O este centrul pătratului. În interior este considerat triunghiul dreptunghic MAB, cu ipotenuza AB și $\sphericalangle MAB = 30°$. Aria triunghiului MNO este:



a) $\frac{9}{2}$ cm^2; **b)** $\frac{3}{2}$ cm^2;
c) 2,25 cm^2; **d)** 9 cm^2.

(5p) **5.** În figura alăturată sunt reprezentate un cerc de centru O și o coardă AB cu lungimea de $4\sqrt{3}$ cm. Dacă C și D sunt punctele diametral opuse punctelor A, respectiv B și $BC = 4$ cm, atunci măsura arcului CD este egală cu:



a) 30°; **b)** 60°;
c) 90°; **d)** 120°.

(5p) **6.** Un con circular drept are aria totală egală cu 36π cm^2 și perimetrul secțiunii axiale egal cu 18 cm. Volumul conului este egal cu:
a) 16π cm^3; **b)** 12π cm^3; **c)** 15π cm^3; **d)** 9π cm^3.

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Într-o clasă a VIII-a sunt 30 de elevi. Dacă băieții ar fi cu 3 mai mulți, atunci jumătate din numărul lor ar reprezenta 60% din numărul fetelor.

(2p) **a)** Justifică dacă numărul fetelor poate fi egal cu 10.

(3p) **b)** Determină numărul băieților din clasă.

2. Se consideră numerele $a = (-2)^{11} : 2^8 + 5^{33} : 25^{16} + 2024^0$ și $b = \left(1+\frac{1}{3}-\frac{5}{2}\right):\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)$.

(2p) **a)** Arată că $a = -2$.

(3p) **b)** Calculează $(a + b + a \cdot b)^{2025}$.

3. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{x}{2}+1$.

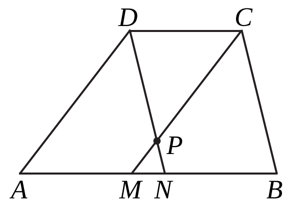
(2p) **a)** Află coordonatele punctelor situate pe graficul funcției f care se găsesc la distanța 2 față de axa ordonatelor.

(3p) **b)** Rezolvă inecuația $2f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) < 0$.

4. În figura alăturată $ABCD$ este un trapez, având $AB \parallel DC$, $AB = 10$ cm, $CD = 4$ cm, $AD = 6$ cm și $BC = 9$ cm. Punctele M și $N \in AB$, astfel încât $CM \parallel AD$ și $DN \parallel BC$, iar $\{P\} = CM \cap DN$.

(2p) **a)** Demonstrează că triunghiul MNP este isoscel.

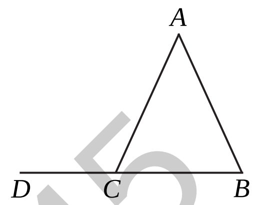
(3p) **b)** Calculează valoarea raportului $\dfrac{\mathcal{A}_{ABCD}}{\mathcal{A}_{MNP}}$.



5. În figura alăturată este reprezentat triunghiul isoscel ABC, având baza $BC = 2$ cm și perimetrul egal cu 16 cm. Punctul D se află pe semidreapta BC și $BD = 5$ cm.

(2p) **a)** Demonstrează că $AD = 8$ cm.

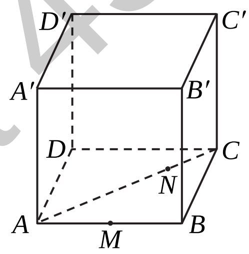
(3p) **b)** Justifică relația $\sphericalangle ABC > 60°$.



6. În figura alăturată este reprezentat cubul $ABCDA'B'C'D'$ în care punctul M este mijlocul laturii AB și $N \in (AC)$, cu $AN = 2NC$. Lungimea segmentului $A'N$ este de $2\sqrt{17}$ cm.

(2p) **a)** Arată că perimetrul patrulaterului $ABC'D'$ este $12(\sqrt{2}+1)$ cm.

(3p) **b)** Demonstrează relația $B'N \parallel (D'DM)$.



✦ TESTUL 83 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $2^4 : 8 \cdot 2 - 0{,}5 \cdot 10$ este:
a) –4; **b)** 0; **c)** 35; **d)** –1.

(5p) **2.** Numărul valorilor naturale ale lui x pentru care 2, 4, 6 și x pot forma o proporție este:
a) 12; **b)** 3; **c)** 2; **d)** 1.

(5p) **3.** Reuniunea mulțimilor $A = \{-2, -1, 1, 4\}$ și $B = \{-1, 0, 1, 2\}$ are cardinalul egal cu:
a) 1; **b)** 7; **c)** 8; **d)** 6.

(5p) **4.** Dacă $I = \left(-\dfrac{3}{4}, 1\dfrac{1}{2}\right)$, atunci afirmația „$x \in I$” este adevărată pentru:
a) $x = -\sqrt{2}$; **b)** $x = 1,(6)$; **c)** $x = 0$; **d)** $x = -1$.

(5p) **5.** Beatrice, Corina, Daniel și Eugen au avut de efectuat calculul $\left(\dfrac{\sqrt{18}}{11}\right)^{-1} : \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{3}{\sqrt{8}} - \dfrac{2}{\sqrt{18}}\right)$. Rezultatele obținute sunt trecute în tabelul de mai jos.

Beatrice	Corina	Daniel	Eugen
$\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{1}{2}$	$3\sqrt{2}$	2

Cel care a obținut rezultatul corect este:
a) Corina; **b)** Daniel; **c)** Beatrice; **d)** Eugen.

(5p) **6.** Daniel afirmă că „există cinci numere prime mai mici decât 10”. Afirmația lui Daniel este:
a) adevărată; **b)** falsă.

SOLUȚII

TEME RECAPITULATIVE

TEMA 1. Numere naturale. Numere întregi

1. a) 50; b) 21; c) 2; d) 27. **2.** 45. **3.** Valoarea minimă este 0, iar valoarea maximă este 30. **4.** $n \in \{60, 61, 64, 69\}$. **5.** 1077, 1087. **6.** $a = 15$, $b = 4$. **7.** $a = 20$, $b = 60$, $c = 422$. **8.** 283. **9.** a) 16; b) 0; c) 7; d) 28; e) 32; f) 54; g) 7; h) 12. **10.** b) $a = 2^{30} = 8^{10} < 9^{10} = 3^{20} = b$. **11.** a) $a = (2 \cdot 3^{21})^2$; b) Cum ultima cifră a numărului b este 7, rezultă că b nu este pătrat perfect. **12.** a) Numărul a este suma a 12 numere impare, deci este un număr par; b) $a = (1 + 3 + 3^2 + 3^3) + (3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7) + (3^8 + 3^9 + 3^{10} + 3^{11}) = 40(1 + 3^4 + 3^8) \vdots 10$. **13.** $a = 12 \cdot 14^n \vdots 12$. **14.** $\overline{abcd} = 100\overline{ab} + \overline{cd} = 300\overline{cd} + \overline{cd} = 7 \cdot 43 \cdot \overline{cd} \vdots 7$. **15.** $p = 2$, $q = 3$, $r = 7$. **16.** a) $56 = 2^3 \cdot 7$, $72 = 2^3 \cdot 3^2$, $144 = 2^4 \cdot 3^2$, $2700 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$; b) 10 divizori naturali. **17.** a) $n \in \{70, 72, 74, 76, 78\}$; b) $n \in \{630, 612, 684, 666, 648\}$; c) $n \in \{252, 552, 852, 156, 456, 756\}$; d) $n \in \{170, 125\}$. **18.** $(48, 60) = 12$, $[48, 60] = 240$; b) $(12, 15, 18) = 3$, $[12, 15, 18] = 180$. **19.** Fie x numărul maxim de pachete. Atunci, cum 168, 96 și 72 trebuie să se dividă cu x, rezultă că x este cel mai mare divizor comun al numerelor 168, 96, 72, adică $x = 24$. **20.** Fie x numărul florilor din florărie. Din relațiile $x = 18a + 3 = 24b + 3$ ($a, b \in \mathbb{N}$), deducem că $x - 3 = 72k$ sau $x = 72k + 3$ ($k \in \mathbb{N}$). Cum $450 < 72k + 3 < 570$, rezultă că $x = 72 \cdot 7 + 3 = 507$. **21.** Fie x numărul de sportivi. Avem $x = 6a + 3 = 5b + 1 = 9c + 6$, deci $x + 3 = 6(a + 1) = 4(b + 1) = 9(c + 1)$ ($a, b, c \in \mathbb{N}$). De aici rezultă că $x + 3 = 36k$ ($k \in \mathbb{N}$) și, cum $x + 3 < 53$, deducem că $x = 33$. Numărul maxim de grupe este 11, iar numărul de sportivi dintr-o grupă este 3. **22.** Fie a numărul CD-urilor de 54 de lei și b numărul CD-urilor de 90 de lei cumpărate de Sanda. Avem $54a + 90b = 486$ sau $3a + 5b = 27$. Cum 3 divide pe $3a$ și pe 27, rezultă că 3 divide pe $5b$. De aici, având în vedere că $0 < b < 6$, rezultă că $b = 3$. Deci, $a = 4$ și $b = 3$. Sanda a cumpărat 7 CD-uri. **23.** a) $-7 < -3 < -2 < 0 < 1 < 4 < 9$; b) $7 > 3 > 1 > -1 > -2 > -4 > -5$. **24.** $-8 = (-8) + (-1) + (+1)$. **25.** a) -3; b) 1; c) 5; d) 1; e) -1; f) 21; g) 3; h) 11. **26.** $-17°$C. **27.** Divizorii întregi ai numărului 288 sunt $-1, 1, -2, 2, -3, 3, \ldots$ Suma lor este 0. **28.** $(x + 1) \mid (2x + 5) \Leftrightarrow (x + 1) \mid ((2x + 5) - 2(x + 1)) \Leftrightarrow (x + 1) \mid 3 \Leftrightarrow x + 1 \in \{-3, -1, 1, 3\} \Leftrightarrow x \in \{-4, -2, 0, 2\}$. **29.** $|x| > 3 \Leftrightarrow x \in \{\ldots, -6, -5, -4, 4, 5, 6, \ldots\}$; $|x + 1| \leq 6 \Leftrightarrow x + 1 \in \{-6, -5, -4, \ldots, 4, 5, 6\} \Leftrightarrow x \in \{-7, -6, -5, -4, -3, \ldots, 3, 4, 5\}$. Deci, $x \in \{-7, -6, -5, -4, 4, 5\}$. **30.** $(x + 1)(y + 1) = 5 \Leftrightarrow (x, y) \in \{(-6, -2), (-2, -6), (0, 4), (4, 0)\}$.

TEMA 2. Numere raționale

1. a) 1; b) 1; c) -2; d) 1; e) $-\frac{1}{12}$; f) 2; g) 14; h) $\frac{5}{6}$. **2.** a) $n \in \{0, 1, 2\}$; b) $n = 3$; c) $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. **3.** Opusul lui a este $-a = 1{,}25$. Inversul lui a este $\frac{1}{a} = -\frac{4}{5}$. Modulul lui a este $|a| = 1{,}25$. **4.** $\frac{6}{15} = 0{,}4$; $\frac{11}{5} = 5{,}5$; $\frac{1}{625} = 0{,}0016$. **5.** a) $-\frac{5}{4} < -\frac{1}{2} < -0{,}(4) < 1{,}1(3) < \frac{4}{3} < 1{,}7$; b) $0{,}(3) > 0{,}33 > 0{,}(32) > 0{,}3(2) > 0{,}3 > 0{,}2(3)$. **6.** $\left[\frac{23}{4}\right] = 5$, $\left\{\frac{23}{4}\right\} = 0{,}75$, $\left[-\frac{9}{5}\right] = -2$, $\left\{-\frac{9}{5}\right\} = 0{,}2$. **7.** $A \cap \mathbb{N} = \{2; 5\}$, $A \cap \mathbb{Z} = \{-7; 2; 5\}$, $A \cap (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}) = \left\{-\frac{23}{3}; -3{,}4; 0{,}5; 1{,}(2)\right\}$. **8.** $a = 5$; $b = 1$. **9.** $(a - 2)^{10} = (1 - 2)^{10} = 1$. **10.** $a = 10 \in \mathbb{N}$. **11.** $a = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right) = \frac{9}{10} = 0{,}9$. **12.** $\left(\frac{2a}{3}\right)^{100} = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}\right)^{100} = 1$. **13.** $\frac{12}{7}$. **14.** Dacă n este impar, atunci $a = -\frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{5}{6} = -\frac{3}{4}$, iar dacă n este par, atunci $a = \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{3}{4}$. Prin urmare, $|a| = \frac{3}{4}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. **15.** $9x = 9 \cdot \frac{10}{9} = 10 \in \mathbb{N}$. **16.** Avem $\frac{48}{5} \cdot \frac{a}{b} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow b \mid 48$

$= 18\sqrt{2}$ mm^3; b) Dacă P este mijlocul AD, atunci $\sphericalangle(MN, AC) = \sphericalangle NMP = 45°$. **23.** Dacă M este mijlocul CD, atunci $\sphericalangle((VDC), (ABC)) = \sphericalangle VMO = 45°$. Vom obține $AB = 12$ mm, iar $\mathcal{V} = 1296$ mm^3 = 1,296 cm^3. Vor curge 1,296 ml de apă, mai puțin de 1,3 ml. **24.** a) 9 cm; b) 6 cm. **25.** 40 kg. **26.** 300 g. **27.** b) $l = 4$ cm, apotema trunchiului are 10 cm, $\mathcal{A}_l =$ $= 480$ cm^2. **28.** a) Dacă O și O' sunt centrele bazelor, atunci $AO = 3$ m, $A'O' = 1{,}2$ m și $OO' = 2{,}4$ m; b) $\mathcal{V} = 22{,}464$ m^3 > > 22 m^3. **29.** a) $\mathcal{A}_{ABCDEF} = \dfrac{6 \cdot AB^2\sqrt{3}}{4} = 5400\sqrt{3}$ cm^2; b) Se obține un trunchi de piramidă triunghiulară regulată având latura bazei mici $MN = \dfrac{AF + BE}{2} =$ 90 cm, latura bazei mari $AF = 60$ cm și muchia laterală de 30 cm. Atunci $h_{tr.} = 10\sqrt{6}$ cm și $\mathcal{V} = 42750\sqrt{2}$ cm^3. **30.** $\mathcal{V} = \dfrac{1053\sqrt{3}}{4} < 526{,}5$ cm^3. Deoarece 13 cm^3 cântăresc 10 g, obținem că masa lumânării va fi mai mică decât $\dfrac{10 \cdot 526{,}5}{13}$ = 405 g.

TEMA 14. Corpuri rotunde

1. $157 = 3{,}14 \cdot 25 \cdot h$, deci $h = 2$ cm. **2.** $\mathcal{V} = 900\pi$ cm^3, masa corpului = $1{,}5\pi$ kg > 4,7 kg. **3.** a) $\mathcal{A}_l = 550$ cm^2, deci vom folosi $\dfrac{3}{5} \cdot 550 = 330$ g vopsea; b) $\mathcal{V} = 1925$ cm^3 < 2 ℓ. **4.** a) $\mathcal{A}_l = 120$ dm^2; b) Analizăm două situații: 1) Dacă generatoarea este AD, atunci $G = 10$ dm, $R = \dfrac{6}{\pi}$ dm, $\mathcal{V} = \dfrac{360}{\pi}$ dm^3; 2) Dacă generatoarea este AA_1, atunci $G = 12$ dm, $R = \dfrac{5}{\pi}$ dm, $\mathcal{V} = \dfrac{300}{\pi}$ dm^3. **5.** a) $R = 3$ cm; b) Considerând desfășurarea suprafeței laterale, drumul minim este reprezentat de segmentul AE de pe desfășurare; $AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{9\pi^2 + 49} < \sqrt{90 + 49} < 12$ cm. **6.** a) $R = 10$ cm, $G = 28$ cm; b) Pentru a avea pierderi minime, înălțimea prismei va fi egală cu generatoarea trunchiului, iar bazele prismei vor fi pătrate, având vârfurile pe circumferințele bazelor cilindrului; $\mathcal{V}_{\text{cilindru}} = 8800$ cm^3; $AB = R\sqrt{2}$ cm; $\mathcal{V}_{\text{prismă}} =$ $= 5600$ cm^3. Se pierd 3200 cm^3. **7.** $\mathcal{A}_l = 18\pi$ cm^2. **8.** a) $R = 3{,}5$ cm, $\mathcal{A}_l = 137{,}5$ cm^2 și se pot confecționa cel mult 72 de cornete; b) $\mathcal{V} = 154$ cm^3; masa cornetului este $\dfrac{154}{56} \cdot 40 = 110$ g. **9.** a) $R = 5\sqrt{2}$ cm; b) $\mathcal{V} = \dfrac{\pi R^2 H}{3} = \dfrac{1000\pi}{3}$ cm^3 > 1 ℓ, deci încape 1 ℓ de apă în vasul obținut. **10.** a) $G = 12$ cm, $H = 6\sqrt{3}$ cm < 10,5 cm; b) Desfășurarea suprafeței laterale este un sector de disc având unghiul $\alpha = 360° \cdot \dfrac{R}{G} = 180°$, iar drumul minim este reprezentat de segmentul AB de pe desfășurare; $AB = 12\sqrt{2}$ cm. **11.** 51 g. **12.** a) $H = 12$ cm; b) Dacă v este volumul conului mic și h înălțimea sa, atunci $\dfrac{v}{V} = \left(\dfrac{h}{H}\right)^3$, deci $\left(\dfrac{h}{H}\right)^3 = \dfrac{1}{8}$, de unde $h = 6$ cm. Secțiunea se va face la 6 cm de planul bazei. **13.** $\mathcal{V} = 11{,}1\pi\ \ell > 30\ \ell$, deci robinetul nu poate umple găleata. **14.** a) $r = 2$ cm; b) $\mathcal{V}_{\text{tr.}} = 181\pi$ ml, iar $181\pi > 500$, deci încap 500 ml de suc în pahar. **15.** a) $R = 8$ dm, $h = 6\sqrt{3} < 11$ dm; b) Dacă $AD \cap BC = \{M\}$, atunci triunghiul MAB este echilateral, iar distanța de la M la planul bazei mici va fi egală cu $2\sqrt{3}$ dm. **16.** a) $h = 12$ cm; b) $\mathcal{A}_{\text{piesă}} = \mathcal{A}_{t\text{ trunchi}} + \mathcal{A}_{l\text{ cilindru}} - 2\mathcal{A}_{b\text{ cilindru}} = 410\pi$ cm^2. **17.** a) $R = 7$ cm, $r = 1$ cm, $h = 8$ cm, $h = 10$ cm, $\mathcal{V}_{\text{tr.}} = 152\pi$ cm^3 > 475 cm^3; b) Se va acoperi cu hârtie suprafața laterală și baza mică, deci vom folosi 81π cm^2. Dacă s este suprafața de hârtie folosită la ambalare, atunci $\dfrac{90}{100}s = 81\pi$, de unde $s = 90\pi$ cm^2. **18.** a) $R + r = 24$ și $R - r = 6$, deci $R = 15$ cm, $r = 9$ cm, $\mathcal{V}_{\text{tr.}} = 1176\pi$ cm^3; b) Generatoarea conului va fi egală cu 25 cm, deci măsura unghiului va fi $\alpha = 216°$. **19.** a) $S = 96\pi$ cm^2; b) $\dfrac{4 \cdot \pi \cdot 6^3}{3} = \dfrac{\pi \cdot 12^2 \cdot h}{3}$, de unde $h_{\text{con}} = 6$ cm.

20. $\mathcal{V}_{\text{dovleac}} = 4\pi \cdot 24^2$, deci $\dfrac{4\pi r^3}{3} = 4\pi \cdot 24^2$, așadar, raza dovleacului este $r = 12$ cm.

MODELE DE TESTE PENTRU EVALUAREA NAȚIONALĂ

P R E C I Z Ă R I

Subiectul I și Subiectul al II-lea

- Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie 5 puncte, fie 0 puncte.
- Nu se acordă punctaje intermediare.

Subiectul al III-lea

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

- Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut.

TESTUL 1

Subiectul I. 1. c). **2.** c). **3.** b). **4.** d). **5.** a). **6.** a).
Subiectul al II-lea. 1. c). **2.** d). **3.** a). **4.** c). **5.** b). **6.** b).
Subiectul al III-lea. 1. Fie x lungimea drumului în kilometri. a) Dacă în prima zi biciclistul ar fi parcurs 13 km, atunci $\frac{x}{3}-5=13$, de unde rezultă că $x = 54$ km, ceea ce nu este posibil, deoarece numai în ultima zi biciclistul a parcurs 55 km. Deci, nu este posibil ca biciclistul să fi parcurs în prima zi 13 km; b) În prima zi biciclistul a parcurs $\left(\frac{x}{3}-5\right)$ km, iar în a doua zi a parcurs $\left[15+\frac{1}{3}\left(\frac{2x}{3}+5\right)\right]$ km. Din ecuația $\frac{x}{3}-5+15+\frac{1}{3}\left(\frac{2x}{3}+5\right)+55=x$ rezultă că $x = 150$ km. **2.** a) $E(2) = -9$; b) $E(x) = x^2 - 6x - 1 = (x-3)^2 - 10 \geq -10$, pentru orice număr real x. **3.** a) $A(-3, 0)$, $B(0, 4)$; b) B este mijlocul segmentului AP, deci $x_B = \frac{x_A + x_P}{2}$ și $y_B = \frac{y_A + y_P}{2}$, de unde rezultă că $x_P = 3$ și $y_P = 8$, deci $P(3, 8)$. **4.** a) $\mathscr{A}_{ADC} = \frac{AB \cdot DC}{2} = 48$ cm^2; b) Fie $\{F\} = DE \cap AC$. Deoarece $\sphericalangle FDC + \sphericalangle FCD = \sphericalangle BDE + \sphericalangle ACB = 90°$, rezultă că $EF \perp AC$. Din relațiile $EF \perp AC$ și $CB \perp AE$, deducem că D este ortocentrul triunghiului ACE, deci $AD \perp EC$. **5.** a) Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul ADC, obținem $AC = 15$ cm. Cum $DC \parallel AB$, avem $\Delta DOC \sim \Delta BOA$, deci $\frac{OC}{OA} = \frac{DC}{AB} = \frac{9}{16}$. Din relațiile $\frac{OC}{OA} = \frac{9}{16}$ și $OC + OA = 15$, deducem că $OA = \frac{48}{5}$ cm; b) Analog, obținem $OD = \frac{36}{5}$ cm. Cum $OA^2 + OD^2 = AD^2$, rezultă că diagonalele trapezului, AC și BD, sunt perpendiculare. **6.** a) Deoarece $BB' \perp (ABC)$ și $BM \perp CM$, rezultă că $B'M \perp CM$, deci $\mathscr{A}_{CMB'} = \frac{CM \cdot MB'}{2} = \frac{6\sqrt{3} \cdot 10}{2} = 30\sqrt{3}$ cm^2; b) d$(A, (CMB')) = \frac{BB' \cdot \mathscr{A}_{ACM}}{\mathscr{A}_{CMB'}} = \frac{24}{5} = 4{,}8$ cm.

TESTUL 2

Subiectul I. 1. b). **2.** a). **3.** a). **4.** d). **5.** c). **6.** b).
Subiectul al II-lea. 1. c). **2.** c). **3.** c). **4.** b). **5.** c). **6.** d).
Subiectul al III-lea. 1. a) Dacă r este numărul merelor roșii, g al celor galbene și v al celor verzi, atunci, din relațiile $\frac{r}{2} = \frac{g}{5} = \frac{v}{6}$ și $r + g + v = 52$, rezultă că $r + \frac{5r}{2} + 3r = 52$, de unde $r = 8$; b) Notăm cu x numărul merelor galbene care ar

$BM \perp CD$, rezultă că $\sphericalangle((ACD), (BCD)) = \sphericalangle(AM, BM)$. Dacă $AO \perp (BCD)$, $O \in (BCD)$, atunci $O \in BM$ și $MO = BM : 3$. Avem $\cos(\sphericalangle(AM, BM)) = \cos(\sphericalangle AMO) = MO : AM = MO : BM = \frac{1}{3}$; b) Din relațiile $CD \perp AM$ și $CD \perp BM$ rezultă că $CD \perp (ABM)$, deci $CD \perp AB$.

TESTUL 39

Subiectul I. 1. c). **2.** b). **3.** c). **4.** c). **5.** a). **6.** b).
Subiectul al II-lea. 1. c). **2.** a). **3.** b). **4.** d). **5.** c). **6.** b).
Subiectul al III-lea. 1. a) Dacă primul clasat ar avea 12 puncte, atunci al doilea ar avea 11 puncte, iar al treilea ar avea 10,5 puncte. În acest caz, ei ar avea împreună 33,5 puncte, fals. Deci, nu este posibil ca primul clasat să aibă 12 puncte; b) 12,5 puncte; 11,5 puncte; 11 puncte. **2.** a) $E(x) = \frac{x^2-4x+4}{4x}\cdot\frac{2x}{x-2}+\frac{1}{2}=\frac{x-2}{2x}+\frac{1}{2}=1-\frac{1}{x}$; b) $\frac{1}{4}$. **3.** a) $A(3, 0)$; $B(0, 6)$; b) $m = 9$. **4.** a) $AP = 12\sqrt{3}$ m < 21 m; b) Din relațiile $AP = CP = 12\sqrt{3}$ m și tg $60° = \sqrt{3} = \frac{CD}{CP}$, rezultă că $CD = 36$ m. **5.** a) $\sphericalangle ACB = \sphericalangle CAD = 30°$, $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BAC - \sphericalangle CAD = 90°$; b) $\Delta CDA \sim \Delta CAB \Rightarrow \frac{CD}{CA}=\frac{CA}{CB} \Rightarrow CD \cdot CB = CA^2 = 100$ cm^2. **6.** a) Din relațiile $2VA + 2OA = 16$ cm și $\frac{OA}{VA}=\frac{3}{5}$ rezultă că $OA = 3$ cm, $VA = 5$ cm și $VO = 4$ cm; b) Din egalitatea $\frac{\mathcal{V}_{\text{con mic}}}{\mathcal{V}_{\text{tr}}}=\frac{1}{7}$, rezultă că $\frac{\mathcal{V}_{\text{con mic}}}{\mathcal{V}_{\text{con mare}}}=\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{2}\right)^3$, deci secțiunea se face prin mijlocul înălțimii. Distanța cerută este de 2 cm.

TESTUL 40

Subiectul I. 1. d). **2.** c). **3.** d). **4.** d). **5.** a). **6.** b).
Subiectul al II-lea. 1. b). **2.** c). **3.** b). **4.** d). **5.** c). **6.** a).
Subiectul al III-lea. 1. a) 3914 t; b) 87 ha, 119 ha. **2.** a) $E(x) = \frac{x^2}{x+1}\cdot\frac{x(x+1)}{1}-x = x^3-x$; b) $E(n) = n(n-1)(n+1)$. Cum $n-1$, n și $n+1$ sunt trei numere naturale consecutive ($n \in \mathbb{N}^*$), rezultă că unul dintre ele se divide cu 2 și unul dintre ele se divide cu 3 (este posibil să fie același număr), deci produsul lor se divide cu 6, căci $(2; 3) = 1$. **3.** a) Cum $f(\sqrt{9}) = 0$, rezultă că produsul considerat este egal cu 0; b) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$. **4.** a) Fie $DP \perp AB$, $P \in (AB)$. Avem $AP = \frac{AD}{2} = 6$ cm, $PB = 18$ cm, $DP = 6\sqrt{3}$ cm, deci $BD = 12\sqrt{3}$ cm; b) Dacă F este mijlocul lui AB, atunci $BF = CE$ și $BF \parallel CE$, adică $BFEC$ este paralelogram, deci $EF = BC = 12$ cm. Așadar, $EF = AF = BF = 12$ cm, de unde rezultă că $\sphericalangle AEB = 90°$. **5.** a) Deoarece $\sphericalangle DAE = 30° + 60° = 90°$, rezultă că $DE^2 = AD^2 + AE^2 = 16 \cdot 5$, deci $DE = 4\sqrt{5}$ cm; b) Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice DCF și EBF, obținem $DF = EF = 4\sqrt{5} = DE$, de unde rezultă că triunghiul DEF este echilateral. **6.** a) $\sphericalangle((ABD), (CBE)) = \sphericalangle(AB, BC) = 60°$; b) Fie $DE \cap AC = \{F\}$. Avem $(ABC) \cap (BDE) = BF$. Cum $CE \parallel AD$ și $AD = 2CE$, rezultă că $AC = CF = BC$, deci $AB \perp BF$. Din relațiile $DA \perp (ABC)$ și $AB \perp BF$, deducem că $DB \perp BF$. Prin urmare, distanța căutată este $BD = 50$ cm.

TESTUL 41

Subiectul I. 1. a). **2.** c). **3.** d). **4.** d). **5.** b). **6.** a).
Subiectul al II-lea. 1. b). **2.** a). **3.** c). **4.** b). **5.** c). **6.** a).

TESTUL 82

Subiectul I. 1. b). **2.** c). **3.** b). **4.** a). **5.** c). **6.** b).
Subiectul al II-lea. 1. c). **2.** b). **3.** c). **4.** c). **5.** d). **6.** a).

Subiectul al III-lea. 1. a) Fie f numărul fetelor și b numărul băieților din clasă; $f + b = 30$ și $\frac{b+3}{2} = \frac{3f}{5}$. Dacă $f = 10$, atunci $b = 20$ și $\frac{23}{2} = \frac{30}{5}$ (fals). Așadar, nu pot fi 10 fete; b) $b = 15$ și $f = 15$. **2.** a) $a = -8 + 5 + 1 = -2$; b) $b = -1$ și $(a + b + a \cdot b)^{2025} = (-1)^{2025} = -1$. **3.** a) Determinăm punctele de forma $P(2, y)$ și $Q(-2, y)$, situate pe grafic; atunci $f(2) = y$ și $y = 0$ sau $f(-2) = y$ și $y = 2$. Punctele sunt $P(2, 0)$ și $Q(-2, 2)$; b) $2\left(-\frac{x}{2}+1\right)-\left(-\frac{x}{4}+1\right) < 0$, de unde rezultă că $x \in \left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$. **4.** a) $ADCM$ și $BCDN$ sunt paralelograme, deci $AM = BN = 4$, $MN = 2$, $CM = 6$ și $DN = 9$. Deoarece $\Delta NMP \sim \Delta NAD$, rezultă că $MP = 2 = MN$, deci ΔMNP este isoscel; b) Fie $s = \mathcal{A}_{MNP}$. Cum $\Delta MNP \sim \Delta CDP$, rezultă că $\frac{\mathcal{A}_{CDP}}{\mathcal{A}_{MNP}} = \left(\frac{CD}{MN}\right)^2 = 4$, deci $\mathcal{A}_{CDP} = 4s$. În mod similar, $\mathcal{A}_{ADPM} = 8s = \mathcal{A}_{BCPN}$, astfel că $\mathcal{A}_{ABCD} = 21s$, iar $\frac{\mathcal{A}_{ABCD}}{\mathcal{A}_{MNP}} = 21$. **5.** a) Dacă M este mijlocul laturii BC, atunci $AM = 4\sqrt{3}$ cm și $AD = \sqrt{AM^2 + MD^2} = 8$ cm; b) Din ΔADM obținem că $\sphericalangle ADM = 60°$. Deoarece $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB$ și $\sphericalangle ACB$ este unghi exterior ΔADC, rezultă că $\sphericalangle ABC > \sphericalangle ADB = 60°$. **6.** a) Dacă l este lungimea laturii cubului, atunci, din $\Delta A'AN$, $A'N^2 = AA'^2 + AN^2$, de unde $l = 6$ cm; $ABC'D'$ este dreptunghi și $\mathcal{P}_{ABC'D'} = 2AB + 2BC' = 12(\sqrt{2}+1)$ cm; b) Fie $\{S\} = BN \cap DC$. Deoarece $\Delta CNS \sim \Delta ANB$, rezultă că $\frac{SC}{AB} = \frac{1}{2}$, deci S este mijlocul lui DC. Ținând cont că $BB' \parallel DD'$, $MD \parallel BS$, $BB' \cap BS = \{B\}$, $DD' \cap DM = \{D\}$, rezultă că $(D'DM) \parallel (B'BS)$ și, cum $B'N \subset (B'BS)$, se obține concluzia.

TESTUL 83

Subiectul I. 1. d). **2.** c). **3.** d). **4.** c). **5.** d). **6.** b).
Subiectul al II-lea. 1. a). **2.** d). **3.** c). **4.** d). **5.** a). **6.** b).

Subiectul al III-lea. 1. a) Dacă p este prețul inițial, atunci prețul final este $\frac{99p}{100}$. Deoarece $\frac{99p}{100} \neq p$, rezultă că cele două prețuri nu coincid; b) Din relația $\frac{10}{100} \cdot \frac{11p}{10} = 22$ rezultă că $p = 200$ de lei. **2.** a) $E(x) = \frac{x^2}{2x-1} - \frac{x+1-2}{x(x+1)} : \frac{x^2-1-x^2+2x}{x(x-2)(x+1)} = \frac{x^2}{2x-1} - \frac{x^2-3x+2}{2x-1} = \frac{3x-2}{2x-1}$; b) Fie $d = (3n - 2, 2n - 1)$, atunci $d \mid 2n - 1$ și $d \mid 3n - 2$, de unde $d \mid 1$, $d = 1$, deci fracția este ireductibilă. **3.** a) $M(x, y) \in G_f$, cu $x + y = 11$; atunci $y = f(x)$ și $x + y = 11$, de unde $x = 4$, $y = 7$ și $M(4, 7)$ este punctul căutat; b) $f(m) \cdot f(-m) = f(-1)$ conduce la $4m^2 - 1 = 3$, de unde $m \in \{-1, 1\}$. **4.** a) Fie $\{O\} = AC \cap BD$. Din ΔMOA, $\sphericalangle O = 90°$ obținem că $MA = 4\sqrt{5}$ cm. Atunci $\mathcal{A}_{MBA} = \frac{MB \cdot AO}{2} = \frac{MA \cdot d}{2}$, unde $d = d(B, MA)$. Se obține $d = \frac{MB \cdot AO}{MA} = \frac{4}{\sqrt{5}}$ cm; b) Dacă T este mijlocul laturii MC, atunci TB este linie mijlocie în ΔDCM, deci $TB \parallel DC$. Dar și $BA \parallel DC$, deci A, B și T sunt coliniare. **5.** a) ΔABC este echilateral și $AM = MC$, rezultă că $BM \perp AC$. Din ΔDMA, $\sphericalangle M = 90°$, $\sphericalangle DAM = 30°$ și $DM = \sqrt{3}$ cm obținem că $AM = 3$ cm, deci $AC = 6$ cm și $\mathcal{A}_{ABC} = 9\sqrt{3}$ cm^2; b) Deoarece $\sphericalangle EAB = 90°$ și $\sphericalangle ABE = 45°$, rezultă că ΔEAB este dreptunghic isoscel, deci $EA = AB$. Însă $AB = AC$, deci ΔCAE este isoscel, cu $\sphericalangle EAC = 30°$. Ținând cont că $\sphericalangle BEA = 45°$, iar $\sphericalangle BEC = \sphericalangle CEA - \sphericalangle BEA = 75° - 45° = 30°$, constatăm că $2 \cdot \sphericalangle BEA = 3 \cdot \sphericalangle BEC$. **6.** a) OP este mediana corespunzătoare ipotenuzei în ΔAOD, $\sphericalangle O = 90°$, deci $AD = 2OP = 12$ cm, atunci $\mathcal{V}_{ABCD} = \frac{l^3\sqrt{2}}{12} = 144\sqrt{2}$ cm^3; b) Din $CD \perp AM$ și $CD \perp BM$ rezultă că $DC \perp (ABM)$. Dacă T este mijlocul laturii AM, atunci $PT \parallel DM$, $PT = 3$ cm. Ținând cont că $PT \parallel DM$, $DM \perp (ABM)$, rezultă că $pr_{(ABM)}\, OP = OT$, iar $\sphericalangle(OP, (ABM)) = \sphericalangle TOP$. În sfârșit, din ΔPTO, $\sphericalangle T = 90°$, $OP = 6$ cm, $PT = 3$ cm, rezultă că $\sphericalangle TOP = 30°$.

Cuprins