Anton NEGRILĂ
Maria NEGRILĂ

matematică
algebră
geometrie

clasa a VIII-a

partea a II-a

ediția a XIII-a

mate 2000 – consolidare

MATE 2000+
Consolidare

Nume: ....

Prenume: ....

Clasă: ....

Școală: ....

....

EDITURA PARALELA 45
EDUCAȚIONAL

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.C. nr. 6250/21.12.2020.
Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programa școlară în vigoare pentru clasa a VIII-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Referință științifică: Lucrarea a fost definitivată prin contribuția și recomandările Comisiei științifice și metodice a publicațiilor Societății de Științe Matematice din România. Aceasta și-a dat avizul favorabil în ceea ce privește alcătuirea și conținutul matematic.

Redactare: Iuliana Ene, Andreea Roșca
Tehnoredactare: Carmen Rădulescu, Adriana Vlădescu
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
NEGRILĂ, ANTON
Matematică : algebră, geometrie : clasa a VIII-a /
Anton Negrilă, Maria Negrilă. – Ed. a 13-a. –
Pitești : Paralela 45, 2024 –
vol.
ISBN 978-973-47-4094-9
Partea 2. – 2024. – ISBN 978-973-47-4190-8
I. Negrilă, Maria
51

COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ

EDITURA PARALELA 45
Bulevardul Republicii, Nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești,
jud. Argeș, cod 110177
Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492
E-mail: **comenzi@edituraparalela45.ro**
sau accesați **www.edituraparalela45.ro**

Tiparul executat la tipografia *Editurii Paralela 45*
E-mail: tipografie@edituraparalela45.ro

Algebră

Capitolul I
Calcul algebric în $\mathbb{R}$

PP **Competenţe specifice**

- C1. Identificarea componentelor unei expresii algebrice
- C2. Aplicarea unor reguli de calcul cu numere reale exprimate prin litere
- C3. Utilizarea formulelor de calcul prescurtat şi a unor algoritmi pentru rezolvarea ecuaţiilor şi a inecuaţiilor
- C4. Exprimarea matematică a unor situaţii concrete prin calcul algebric
- C5. Interpretarea unei situaţii date utilizând calcul algebric
- C6. Interpretarea matematică a unor probleme practice prin utilizarea ecuaţiilor sau a formulelor de calcul prescurtat

PE-PP
1. Operaţii cu rapoarte algebrice de numere reale reprezentate prin litere

PE-PP
1.1. ADUNAREA ŞI SCĂDEREA

Suma (**diferența**) a două **rapoarte** algebrice este tot un **raport** algebric. Operația de adunare (scădere) a două rapoarte algebrice se poate face în două situații:

a) dacă ambele rapoarte au **același numitor**, suma lor este un raport algebric care are ca numitor numitorul comun al celor două rapoarte și ca numărător suma (diferența) numărătorilor celor două rapoarte;

b) dacă cele două rapoarte au **numitori diferiți**, se amplifică, aducându-se la același numitor și se adună (se scad) conform regulii de mai sus.

Observaţie:

Operația de adunare (scădere) a rapoartelor algebrice are aceleași proprietăți ca operația de adunare (scădere) a fracțiilor ordinare.

Exemple:

a) $\frac{5x-3}{4}+\frac{x}{4}+\frac{x^2+12}{4}=\frac{5x-3+x+x^2+12}{4}=\frac{x^2+6x+9}{4}=\frac{(x+3)^2}{4}$;

b) $\frac{2x+7}{3x}+\frac{x-3}{2x^2}+\frac{4x+5}{6}=\frac{2x(2x+7)}{6x^2}+\frac{3(x-3)}{6x^2}+\frac{x^2(4x+5)}{6x^2}=\frac{4x^3+9x^2+17x-9}{6x^2}$, $x\in\mathbb{R}^*$.

● ● ● activităţi de învăţare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Efectuați:

a) $\frac{x}{5}+\frac{2}{5}$; b) $\frac{3x+2}{7}+\frac{4x+5}{7}$; c) $\frac{2-3x}{11}+\frac{9-8x}{11}$;

d) $\frac{4x+6}{3}+\frac{x+3}{3}$; e) $\frac{x-3}{2}+\frac{3x+4}{2}+\frac{4x+7}{2}$; f) $\frac{x+5}{3}+\frac{2-7x}{2}+\frac{2x-4}{5}$.

2. Efectuați calculele:

a) $\frac{7x-6}{x-2}+\frac{2-5x}{x-2}$; b) $\frac{17x+9}{x+1}+\frac{8}{x+1}$;

c) $\frac{x}{x-3}+\frac{5}{x-3}+\frac{2x-14}{x-3}$; d) $\frac{6x}{3x-2}+\frac{5-3x}{3x-2}-\frac{7}{3x-2}$.

3. Efectuați calculele:

a) $\frac{1}{2}+\frac{x+2}{3x}-\frac{5x^2+4}{6x^2}$; b) $\frac{2x}{x^2+x}+\frac{2}{x^2+x}$; c) $\frac{2x+3}{x^2-1}+\frac{3x+2}{x^2-1}$;

d) $\frac{x(x-1)}{x^2-4}+\frac{x-4}{x^2-4}$; e) $\frac{x^2}{x^2-2x}+\frac{2-3x}{x^2-2x}$; f) $\frac{x^2+3}{x^2+2x-3}+\frac{4x}{x^2+2x-3}$;

g) $\frac{x(x-3)}{x^2-16}+\frac{2x-5}{x^2-16}-\frac{11-x}{x^2-16}$.

PE Aplicare și exersare **

4. Efectuați:

a) $\frac{2x}{x-1}-\frac{2}{x+1}-\frac{4}{x^2-1}$; b) $\frac{x+2}{x-2}-\frac{x-2}{x+2}-\frac{16}{x^2-4}$;

c) $\frac{x-1}{x-2}-\frac{x+3}{x+2}+\frac{2}{x^2-4}$; d) $\frac{4}{x+2}-\frac{x+10}{x^2-4}+\frac{3}{x-2}$;

e) $\frac{1-3x}{x^2-x}+\frac{2}{x-1}+\frac{5}{3x}$; f) $\frac{3x+1}{2x^2-6x}-\frac{x+2}{3x-9}+\frac{2x-1}{6x}$.

5. Calculați:

a) $\frac{x-2}{x+1}+\frac{x+4}{x^2+3x+2}-\frac{x-1}{x+2}$; b) $\frac{x+1}{x-1}+\frac{4}{x^2-1}+\frac{1-x}{x+1}$;

c) $\frac{2x+1}{x-2}+\frac{1-2x}{x+2}+\frac{x^2+16}{x^2-4}$; d) $\frac{x-2}{x+1}+\frac{x+3}{x+2}+\frac{5-x^2}{x^2+3x+2}$.

6. Calculați:

a) $\frac{x+2}{x-3}-\frac{x-1}{x+3}+\frac{24}{x^2-9}$;

b) $\frac{x+1}{x-4}+\frac{16-6x}{x^2-16}-\frac{x-1}{x+4}$;

c) $\frac{x+2}{x-3}-\frac{x-3}{x-4}+\frac{5}{x^2-7x+12}$;

d) $\frac{x-5}{x-2}-\frac{x+1}{x-4}-\frac{6}{x^2-6x+8}$.

PE Aprofundare și performanță ***

7. Efectuați calculele:

a) $\frac{x^2+4}{x^2-4}-\left[\frac{5}{x-2}-\left(\frac{x+1}{x-2}-\frac{x}{x+2}\right)\right]$;

b) $\frac{4x+5}{x^2-1}-\left[\frac{2}{x-1}-\left(\frac{x}{x+1}-\frac{2}{x-1}+\frac{x^2}{1-x^2}\right)\right]$;

c) $\frac{x^2-27}{x^2-9}-\left[\frac{5}{x+3}-\left(\frac{x}{x-3}-\frac{x+1}{x+3}\right)\right]$;

d) $\frac{x}{x^2-25}-\left[\frac{3}{x-5}-\left(\frac{x+1}{x-5}-\frac{3}{x+5}+\frac{x^2}{25-x^2}\right)\right]$.

8. Fie expresia $E(x)=\frac{3}{4x^2-9}-\frac{x+1}{2x+3}-\frac{x}{2x-3}$.

a) Determinați $x \in \mathbb{R}$ pentru care $E(x)$ nu este definită.

b) Aduceți expresia la forma cea mai simplă.

c) Aflați $n \in \mathbb{N}$ pentru care $E(n) \in \mathbb{N}$.

9. Se consideră expresia $F(x)=\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{2x+2}{x^2-1}$.

a) Determinați $x \in \mathbb{R}$ pentru care $F(x)$ nu este definită.

b) Arătați că $G(x) = (x + 1) \cdot F(x)$ este număr natural.

c) Calculați suma: $F(2) \cdot F(3) + F(3) \cdot F(4) + \ldots + F(2020) \cdot F(2021)$.

PE-PP Supermate ****

10. Fie expresia $E(x)=\left(\frac{12}{x^2-9}+\frac{x}{x-3}\right)-\left[\frac{x+1}{x+3}+\left(\frac{x+2}{x-3}-\frac{x}{x+3}\right)\right]$.

a) Determinați valorile reale ale lui x pentru care expresia este definită.

b) Aduceți expresia la forma cea mai simplă.

c) Determinați valorile lui $n \in \mathbb{Z}$ pentru care $E(n) \in \mathbb{Z}$.

11. Fie expresia $E(x)=\left(\frac{x}{x+4}+\frac{24}{x^2-16}\right)-\left[\frac{x+3}{x+4}-\left(\frac{x-1}{x-4}-\frac{x-2}{x+4}\right)\right]$.

a) Determinați valorile reale ale lui x pentru care expresia este definită.

b) Aduceți expresia la forma cea mai simplă.

c) Determinați $n \in \mathbb{Z}$ pentru care $E(n) \in \mathbb{Z}$.

PE-PP **1.2. ÎNMULŢIREA. ÎMPĂRŢIREA. RIDICAREA LA PUTERE**

Produsul a două rapoarte algebrice, **câtul** a două rapoarte algebrice, **puterea a *n*-a** a unui raport algebric, $n \in \mathbb{Z}$, sunt tot rapoarte algebrice.

Produsul a două rapoarte algebrice este raportul algebric care are ca numărător produsul numărătorilor rapoartelor date, iar ca numitor produsul numitorilor rapoartelor date.

Exemple: a) $\frac{4x^2}{3y} \cdot \frac{9y^2}{8x^3} = \frac{3y}{2x}$, $x, y \in \mathbb{R}^*$; b) $\frac{3x}{5x+5} \cdot \frac{10x+10}{18x^2} = \frac{1}{3x}$, $x \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1\}$.

Inversul unui raport algebric este raportul algebric care are ca numărător numitorul raportului dat, iar ca numitor numărătorul raportului dat.

Exemple: a) $\left(\frac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{-1} = \frac{x^2+1}{x^2+2}$, $x \in \mathbb{R}$; b) $\left(\frac{3xz}{19ab}\right)^{-1} = \frac{19ab}{3xz}$, $x, z, a, b \in \mathbb{R}^*$.

Câtul a două rapoarte algebrice este raportul algebric obținut prin înmulțirea primului raport, numit deîmpărțit, cu inversul celui de-al doilea raport, numit împărțitor.

Exemple: a) $\frac{4x^2+8}{9x} : \frac{2x^2+4}{27x^2} = 6x$, $x \in \mathbb{R}^*$; b) $\frac{10x^2}{7y^6} : \left(-\frac{15x^3}{14y^4}\right) = -\frac{4}{3y^2x}$, $x, y \in \mathbb{R}^*$.

Puterea a *n*-a a unui raport algebric este raportul care are ca numărător puterea a *n*-a a numărătorului raportului dat, iar ca numitor puterea a *n*-a a numitorului raportului dat.

Exemple: a) $\left(\frac{2x}{3y}\right)^2 = \frac{4x^2}{9y^2}$, $y \in \mathbb{R}^*$; b) $\left(\frac{x+1}{y^2+1}\right)^2 = \frac{(x+1)^2}{(y^2+1)^2}$, $y \in \mathbb{R}$.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Calculați, stabilind de fiecare dată domeniul de existență al rapoartelor:

a) $\frac{2x}{7x+7} \cdot \frac{14x+14}{4x^2}$; b) $\frac{2x+6}{5x^2} \cdot \frac{10x}{4x+12}$; c) $\frac{3x+6}{7x^2} \cdot \frac{14x^2+28x}{x^2+4x+4}$;

d) $\frac{x^2-2x}{5x^2} \cdot \frac{5x+10}{x^2-4}$; e) $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1} \cdot \frac{3x^2-3x}{x^2+x}$; f) $\frac{3x+9}{x^2+2x} \cdot \left(-\frac{3x+6}{2x+6}\right)$.

2. Efectuați calculele, stabilind de fiecare dată domeniul de existență al rapoartelor algebrice:

a) $\frac{x^2-9}{x^2+5x+6} \cdot \frac{x^2-4}{x^2-6x+9}$; b) $\frac{4x+8}{x^2+4x+4} \cdot \frac{x^2-4}{4x-8}$;

c) $\frac{x^2+4x}{x^2-16} \cdot \frac{3x-12}{5x+25}$; d) $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1} \cdot \frac{x^2-3x+2}{4x+4}$;

e) $\frac{7x+35}{x^2-25} \cdot \frac{x^2-7x+10}{x^2-4x+4}$; f) $\frac{x^2-4}{x^2+3x+2} \cdot \frac{x^2+x}{x^2-4x+4}$.

PE Aplicare și exersare **

3. Calculați, stabilind valorile reale ale lui x pentru care rapoartele sunt definite:

a) $\dfrac{3x^2-12x}{x^2-8x+16}:\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-7x+12}$; b) $\dfrac{x^2+5x}{x^2-4x+4}:\dfrac{x^2+7x+10}{x^2-4}$;

c) $\dfrac{3x^2+6x}{x^2+5x+6}:\dfrac{4x-12}{x^2-9}$; d) $\dfrac{6x-18}{x^2-6x+9}:\dfrac{x^2-25}{x^2-8x+15}$;

e) $\dfrac{x^2-9x+20}{x^2-25}:\dfrac{x^2+6x+9}{x^2+8x+15}$; f) $\dfrac{x^2-9}{x^2-7x+12}:\dfrac{x^2+8x+16}{x^2-16}$.

4. Efectuați calculele:

a) $\dfrac{x^2-8x+16}{5x-15}:\dfrac{x^2-2x-8}{x^2-x-6}$; b) $\dfrac{x^2+6x+9}{x^2+7x+12}:\dfrac{x^2-10x+24}{x^2-16}$;

c) $\dfrac{x^2+7x+12}{x^2-25}:\dfrac{x^2+6x+9}{x^2+8x+15}$; d) $\dfrac{x^2+12x+32}{x^2+16x+64}:\dfrac{x^2+11x+28}{x^2-64}$;

e) $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-9}:\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-x-12}$; f) $\dfrac{x^2-25}{x^2+9x+20}:\dfrac{x^2-8x+15}{x^2+7x+12}$.

5. Calculați, stabilind de fiecare dată domeniul de existență al fiecărui raport:

a) $\left(\dfrac{2x}{3x+1}\right)^3\cdot\dfrac{3x+1}{2x}:\left(\dfrac{4x^2}{3x+1}\right)^2$; b) $\left[\dfrac{(2x-3)^3}{(x+2)^2}\right]^2\cdot\left(\dfrac{x+2}{2x-3}\right)^7:\left[\dfrac{(x+2)^2}{2x-3}\right]^2$;

c) $\left[\dfrac{(x-1)^2}{(3x-2)^3}\right]^3:\left[\dfrac{x-1}{(3x-2)^2}\right]^4\cdot\dfrac{1}{(x-1)^2}$; d) $\left[\left(\dfrac{2x-3}{2x}\right)^2\right]^3:\left(\dfrac{2x-3}{2x}\right)^5\cdot\left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^2$;

e) $\left(\dfrac{3x-1}{2x}\right)^5:\left[\dfrac{(3x-1)^2}{4x^2}\right]^2\cdot\dfrac{3x^2-x}{5x^2}$; f) $\dfrac{3x^2-2x}{4x^2}\cdot\left[\left(\dfrac{2x-5}{3x-2}\right)^2\right]^3:\left(\dfrac{2x-5}{3x-2}\right)^5$.

PE Aprofundare și performanță ***

6. Efectuați calculele:

a) $\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{x^2-9}{x^2+7x+12}\cdot\dfrac{3x^2+12x}{x^2-6x+9}$; b) $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+3x-10}:\dfrac{x^2+7x+12}{x^2-9x+14}\cdot\dfrac{x+5}{x-7}$;

c) $\dfrac{x(x+5)+6}{x^2+3x+2}:\dfrac{x(x+8)+15}{x^2+6x+5}$; d) $\dfrac{x^2+8x+12}{x^2+4x+4}:\dfrac{x^2+3x-18}{x^2-4}$;

e) $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+7x+12}\cdot\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+4x+4}:\dfrac{x^2-1}{x^2+4x}$; f) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-2x-24}:\dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-30}\cdot\dfrac{x^2+7x+12}{x^2-6x+9}$.

7. Calculați:

a) $\dfrac{x^2-6x+9}{4x^2-25}\cdot\dfrac{2x+5}{4x-12}:\dfrac{7x-21}{4x^2-20x+25}$; b) $\dfrac{x^2-9}{x^2+7x+12}\cdot\dfrac{x^2+8x+16}{x^2-5x+6}:\dfrac{5x+20}{4x-8}$;

c) $\dfrac{x^2+4x}{x^2-6x+9}:\dfrac{x^2+9x+20}{x^2-7x+12}\cdot\dfrac{2x+10}{3x-12}$; d) $\dfrac{2x^2+5x+3}{3x^2+7x+4}\cdot\dfrac{3x^2+10x+8}{2x^2+9x+9}$.

8. Calculați:

a) $\dfrac{x^2+3x-18}{x^2+2x-8}\cdot\dfrac{x^2-6x+8}{x^2+9x+18}:\dfrac{x^2-7x+12}{2x^2+6x}$;

b) $\dfrac{x^2-x-6}{x^2-2x-15}:\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-6x+5}\cdot\dfrac{4x+12}{6x^2-18x}$;

c) $\dfrac{x+1}{x+2}\cdot\dfrac{x+3}{x+4}:\dfrac{x^2+6x+5}{x^2+6x+8}:\dfrac{x+3}{x+5}$.

PE-PP **Supermate ******

9. Fie expresia $E(x)=\left(\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}\right):\dfrac{2x+6}{x^2+5x+6}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,-2,2\}$.

a) Arătați că $E(x)=\dfrac{x+4}{x-2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,-2,2\}$.

b) Determinați valorile întregi ale lui n pentru care $E(n)$ este număr întreg.

10. Fie expresia $E(x)=10-\dfrac{x}{x-5}\cdot\left(\dfrac{1}{x-5}-\dfrac{x+1}{x^2+5x}\right):\dfrac{1}{(x-5)^2}$.

a) Aflați valorile reale ale lui x pentru care expresia este definită.

b) Aduceți expresia la forma cea mai simplă.

c) Determinați $n\in\mathbb{N}$ pentru care $E(n)\in\mathbb{N}$.

d) Arătați că, dacă $x\in[0;+\infty)$, atunci $E(x)\in(1;9]$.

11. Fie expresia $E(x)=\left(\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{x}{x-3}-1\right)\cdot\dfrac{x+3}{12x+18}$.

a) Pentru ce valori reale ale lui x nu are sens expresia?

b) Arătați că, oricare ar fi $x\in\mathbb{Z}$, $E(x)\notin\mathbb{Z}$.

c) Scrieți ca interval mulțimea $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,|(x-3)^2\cdot E(x)|\le\dfrac{1}{3}\right\}$.

PE-PP 1.3. ORDINEA EFECTUĂRII OPERAŢIILOR ŞI FOLOSIREA PARANTEZELOR

Cu **rapoartele algebrice** se efectuează următoarele **tipuri de operații**:
- de ordinul I (**adunarea** și **scăderea**);
- de ordinul al II-lea (**înmulțirea** și **împărțirea**);
- de ordinul al III-lea (**ridicarea la putere**).

Calculul cu rapoarte algebrice se face respectând următoarele reguli:
- când avem operații de **același ordin**, acestea se efectuează în ordinea în care sunt scrise;
- când avem operații de **ordine diferite**, se efectuează mai întâi operațiile de ordinul al III-lea, apoi cele de ordinul al II-lea și, în final, cele de ordinul I;
- când avem exerciții în care apar **paranteze**, se efectuează mai întâi operațiile dintre parantezele rotunde, apoi operațiile dintre cele pătrate și, în final, cele dintre acolade.

Capitolul II
Funcţii

PP Competenţe specifice

C1. Identificarea unor dependenţe funcţionale în diferite situaţii date

C2. Descrierea unor dependenţe funcţionale într-o situaţie dată, folosind diagrame, tabele sau formule

C3. Reprezentarea în diverse moduri a unor funcţii cu scopul caracterizării acestora

C4. Utilizarea unui limbaj specific pentru formularea unor opinii referitoare la diferite dependenţe funcţionale

C5. Analizarea unor funcţii în context intra şi interdisciplinar

C6. Modelarea cu ajutorul funcţiilor a unor fenomene din viaţa reală

Fie A și B două mulțimi nevide. Dacă printr-un procedeu oarecare facem ca *fiecărui* element din mulțimea A să-i corespundă *un singur* element din mulțimea B, spunem că am definit o funcție de la A la B.

Mulțimea A se numește **domeniu de definiție** al funcției, iar mulțimea B se numește **codomeniul** sau mulțimea în care funcția ia valori. În general, o funcție f definită pe A cu valori în mulțimea B va fi notată $\boldsymbol{f : A \to B}$. Citim „f definită pe A cu valori în B”. Funcțiile se notează de obicei cu f, g, h, … .

Fiind dată o funcție $f : A \to B$, dacă aceasta face ca elementului $a \in A$ să-i corespundă elementul $b \in B$, scriem $f(a) = b$ și spunem că b este valoarea funcției în a.

Legătura pe care o stabilește funcția între elementele $x \in A$ și valorile corespunzătoare $f(x)$ din B se numește **lege de corespondență**. O funcție se descrie prin trei componente:

- domeniul de definiție;
- codomeniul;
- legea de corespondență.

Legea de corespondență a unei funcții poate fi dată în mai multe moduri:

a) se poate descrie cu ajutorul **diagramelor**;

b) se poate exprima prin indicarea într-un **tabel** a valorilor corespunzătoare elementelor din domeniul de definiție;

c) se poate descrie cu ajutorul unei **formule** prin care se precizează valoarea $f(x)$ pentru oricare x din domeniul de definiție.

Fiind dată o funcție $f : A \to B$, mulțimea punctelor din plan având coordonatele (x, y), unde $x \in A$, iar $y = f(x)$, va fi numită **graficul funcției**. Această mulțime se scrie $G_f = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in A\}$.

Egalitatea $y = f(x)$, adevărată pentru oricare element $x \in A$, va fi numită **ecuația graficului** funcției f. Se obișnuiește să se noteze $y = f(x)$, $x \in A$.

Fie $f: A \to B$ o funcție. **Imaginea** (sau mulțimea valorilor) funcției f este mulțimea $\text{Im}\, f = \{f(x) \mid x \in A\}$. În mod evident, $\text{Im}\, f \subset B$.

Se mai poate scrie și astfel:

$$\text{Im}\, f = \{y \in B \mid \text{există } x \in A, \text{ astfel încât } y = f(x)\}.$$

O funcție ale cărei domeniu de definiție și codomeniu sunt submulțimi ale lui $\mathbb{R}$ (mulțimi de numere) se numește **funcție numerică**.

Două funcții $f: A \to B$ și $g: C \to D$ sunt **egale** dacă $A = C$, $B = D$ și $f(x) = g(x)$, oricare ar fi $x \in A$. Se notează $f = g$.

În general, o funcție $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ descrisă de formula $f(x) = ax + b$ (unde a și b sunt numere reale) se numește **funcție liniară**. Reprezentarea geometrică a mulțimii grafic pentru o funcție liniară este o dreaptă.

Pentru a trasa graficul unei funcții liniare este suficient să dăm variabilei x două valori distincte.

Observații:

1. Pentru $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, dacă $a \neq 0$ și $b = 0$, se obțin funcțiile liniare $f(x) = ax$, ale căror grafice conțin originea axelor de coordonate.

2. Pentru $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, dacă $a = 0$ și $b \neq 0$, se obțin funcțiile liniare $f(x) = b$, ale căror grafice sunt drepte paralele cu axa Ox. Funcțiile de acest fel sunt numite funcții constante nenule.

3. Pentru $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, dacă $a = b = 0$, se obține o funcție $f(x) = 0$, al cărei grafic coincide cu axa Ox.

4. Uneori, pentru trasarea graficului unei funcții liniare este mai comod să se stabilească punctele în care graficul intersectează axele de coordonate.

$$G_f \cap Oy = A(0; f(0)) \Leftrightarrow G_f \cap Oy = A(0; b);\ G_f \cap Ox = B\left(-\frac{b}{a};\ 0\right).$$

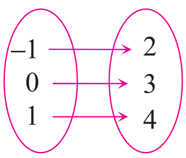
PE-PP 1. Funcţii definite pe mulţimi finite

Exemple:

1. Descrieți printr-o diagramă, apoi printr-un tabel funcția următoare:

$$f: \{-1, 0, 1\} \to \{2, 3, 4\}, f(x) = x + 3.$$

Soluție: $f(-1) = -1 + 3 = 2$, $f(0) = 0 + 3 = 3$, $f(1) = 1 + 3 = 4$.



x	-1	0	1
$f(x)$	2	3	4

2. Explicitați domeniul de definiție pentru funcția

$$f: A \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{2}{x} \text{ și } A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x < 3\}.$$

Soluție: Cum $x \neq 0 \Rightarrow A = \{-1, 1, 2\}$.

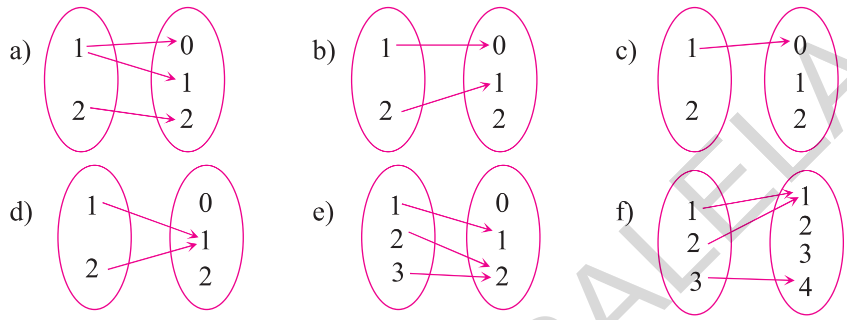
3. Fie funcția $f : A \to \mathbb{R}, f(x) = ax + 2$ și $A = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid |x| \leq 2\}$. Determinați valoarea lui $a \in \mathbb{Z}$ pentru care punctul $B(1; -1)$ aparține graficului funcției.

Soluție: $A = \{-2, -1, 1, 2\}$. Dacă $B(1; -1) \in G_f \Rightarrow f(1) = -1$. Cum $f(1) = a + 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow a + 2 = -1 \Rightarrow a = -3$.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

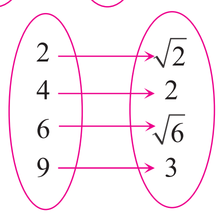
PE Înțelegere *

1. Precizați care dintre diagramele de mai jos definesc funcții:



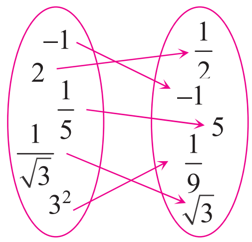
2. Diagrama alăturată definește o funcție.

a) Precizați domeniul și codomeniul funcției.
b) Reprezentați printr-un tabel funcția definită de diagramă.
c) Stabiliți legea de corespondență printr-o formulă.



3. În diagrama alăturată este descrisă o funcție $f : A \to B$.

a) Precizați elementele mulțimilor A și B.
b) Realizați tabelul de valori al funcției f.
c) Descrieți corespondența $x \to f(x)$ printr-o formulă.



4. Descrieți printr-o diagramă, apoi printr-un tabel, funcțiile următoare:

a) $f : \{0, 2, 4\} \to \{0, 2, 4, 6\}, f(x) = x + 2$;
b) $g : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \{0, 1, 2, 3, 4\}, g(x) = x^2$.

5. Prețul unui kilogram de mere este 2 lei. Completați tabelul:

Cantitatea (kg)	3	4,5	7	10	13	35	96
Prețul total (lei)					26		

a) Stabiliți o formulă pentru corespondența realizată între elementele din tabel.
b) Realizați o diagramă corespunzătoare valorilor din tabel.
c) Definiți o funcție cu formula de la subpunctul a), stabilind domeniul și codomeniul acesteia, conform tabelului.

6. Un automobil are de parcurs un drum de 360 km. Completați tabelul:

Timpul (ore)	6	8	4	9	12	18
Viteza (km/h)		45				

a) Stabiliți o formulă care să vă ajute să completați tabelul.

b) Scrieți funcția definită de această formulă, stabilind domeniul și codomeniul indicate în tabel.

7. Un bazin cu capacitatea de 240 hl se umple cu ajutorul unor robinete cu debitul de 10 hl/h. Completați tabelul:

Numărul de robinete	6	4	2	8	12	24
Timpul de umplere (ore)			12			

a) Stabiliți o formulă care să vă ajute să completați tabelul.

b) Scrieți funcția definită de această formulă, stabilind domeniul și codomeniul indicate în tabel.

8. Care dintre tabelele de mai jos descrie o funcție?

a)

x	0	1	2
$f(x)$	1	3	3

b)

x	1	2	1
$f(x)$	2	4	5

c)

x	−1	2	4
$f(x)$	0	4	6

d)

x	−2	−1	0	1	−1
$f(x)$	4	5	3	2	1

9. Care dintre următoarele relații nu reprezintă o funcție?

a) $f: \{-1, 0, 1, 2\} \to \{0, 1\}, f(x) = x^2$.

b) $g: \{0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{N}, g(x) = x^2$.

c) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = \dfrac{2}{x}$.

10. Fie funcția $f: \{-1, 0, 1, 2\} \to \{0, 1, 2\}, f(x) = |x|$.

a) Stabiliți elementele mulțimii grafic.

b) Stabiliți care dintre punctele $A(-1; 1)$, $B(2; -2)$, $C(1; 1)$, $D(-3; 3)$, $E(0; 0)$ se găsesc pe graficul funcției.

11. Fie funcția $f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 3$. Stabiliți care dintre punctele următoare aparțin graficului funcției: $A(-2; 1)$, $B(-1; 3)$, $C(0; 3)$, $D(1; 5)$, $E(2; 6)$.

12. Determinați Im f (mulțimea valorilor funcției) în fiecare dintre cazurile următoare:

a) $f: \{-1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$;

b) $f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + 3$;

c) $f: \{-3, -2, -1, 0, 1\} \to \mathbb{R}, f(x) = -x + 2$.

13. Pentru funcțiile următoare, stabiliți codomeniul cu numărul minim de elemente, știind că:

a) $f: \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} \to B$, unde $f(x) = x + 3$;

b) $f: \{-3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\} \to B$, unde $f(x) = x^2 - 2$;

c) $f: \{-2, -1, 1, 2, 3, 4\} \to B$, unde $f(x) = \dfrac{3}{x}$.

PE-PP **Supermate ******

29. Fie funcția $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(x) =$ ultima cifră a numărului natural x^2.

a) Determinați Im f.
b) Calculați $f(0) + f(1) + f(2) + \ldots + f(21)$.

30. Fie funcția $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(x) =$ ultima cifră a lui 3^x.

a) Determinați Im f.
b) Calculați $f(0) + f(1) + f(2) + \ldots + f(32)$.

PE-PP 2. Funcţia liniară

Exemple:

1. Determinați funcția liniară al cărei grafic trece prin punctele $A(-1; 7)$ și $B(1; -3)$.

Soluție: Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$. Dacă $A(-1; 7) \in G_f \Rightarrow f(-1) = 7$ și cum $f(-1) = -a + b \Rightarrow -a + b = 7$. Dacă $B(1; -3) \in G_f \Rightarrow f(1) = -3$ și cum $f(1) = a + b \Rightarrow a + b = -3$. Adunând cele două relații, se obține $2b = 4$, de unde $b = 2$ și apoi $a = -5 \Rightarrow f(x) = -5x + 2$.

2. Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$ și $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -2x + 3$. Determinați punctul de intersecție a graficelor celor două funcții.

Soluție: $G_f \cap G_g = M(x; y) \Rightarrow f(x) = y$ și $g(x) = y \Rightarrow f(x) = g(x) \Rightarrow 2x - 1 = -2x + 3 \Rightarrow$ $\Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow M(1; 1)$.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE **Înțelegere ***

1. Reprezentați grafic funcțiile:

a) $f : [-2; 3) \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$;
b) $f : [-3; 2] \to \mathbb{R}, f(x) = -x + 5$;
c) $f : (-\infty; 3) \to \mathbb{R}, f(x) = -2x + 3$;
d) $f : [-3; 5) \to \mathbb{R}, f(x) = 2x$;
e) $f : (-6; 5] \to \mathbb{R}, f(x) = 1$;
f) $f : [-4; 4] \to \mathbb{R}, f(x) = -2$.

2. Reprezentați grafic funcțiile:

a) $f : (-\infty; 2) \to \mathbb{R}, f(x) = x + 3$;
b) $f : [-2; 3] \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 3$;
c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x$;
d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 0{,}2x - 3$;
e) $f : [3; +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{3} + 1$;
f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{2}x - 1$.

3. Reprezentați grafic funcțiile:

a) $f : [5; +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{2}{5}x - 2$;
b) $f : (-3; +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x$;
c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -3x + 2$;
d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x+1}{2}$;
e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -4x$;
f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x + 3$.

Capitolul III
Teme pentru recapitularea finală în vederea Evaluării Naţionale

PE-PP

1. Numere naturale. Puteri cu exponent număr natural. Divizibilitate

1. Determinați numerele naturale $\overline{abc}$, cu $a \neq 0$, știind că este îndeplinită condiția:
$$\overline{ab} + 5a = 3(a + b + c).$$

2. Determinați numerele naturale de forma $\overline{abc}$, cu $a \neq 0$, știind că este îndeplinită condiția:
$$\overline{abc} - \overline{ab} = 13c.$$

3. Determinați numerele naturale a și b, știind că numărul a este prim și $a + 6b = 56$.

4. Determinați numărul natural $\overline{abc}$, știind că:
$$\overline{abc} + \overline{bc} + c = 444.$$

5. Determinați numărul natural de trei cifre $\overline{abc}$, cu $a \neq 0$, știind că:
$$\overline{abc} = \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}.$$

6. Determinați numărul natural $\overline{abc}$, scris în baza 10, cu $a > b > c$, știind că este îndeplinită condiția $\overline{abc} - \overline{bc} = 40(b + c + 5)$.

7. Determinați numărul natural $\overline{ab}$, scris în baza 10, cu $a \neq b$, știind că:
$$\overline{ab} - \overline{ba} = a(b - 1).$$

8. Determinați numerele naturale $\overline{abc}$ pentru care are loc egalitatea:
$$\overline{abc} = 3\overline{cba} + a + b + c.$$

9. Determinați numerele naturale de trei cifre $\overline{abc}$, știind că sunt divizibile cu 5 și suma cifrelor lor este egală cu 20.

10. Determinați numărul natural $\overline{ab}$, știind că $\overline{ba} + 5(2a + 3b) = 202$.

11. Calculați suma numerelor naturale $\overline{ab}$ pentru care este îndeplinită condiția:
$$\overline{ab} = 2a + 5b.$$

12. Determinați numerele de forma $\overline{ab}$, $a \neq b$, care îndeplinesc condiția $\overline{ab} + \overline{ba} = 66$.

13. Arătați că $37 \mid A$, unde $A = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$.

14. Arătați că numărul $a = 2 \cdot 3^{12n+5} + 4 \cdot 3^{12n+4} - 14 \cdot 3^{12n+3}$ este divizibil cu 48, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

15. Arătați că numărul $a = 3^{2n+2} \cdot 2^{n+3} + 3^{2n+1} \cdot 2^{n+4} - 9^n \cdot 2^{n+5}$ este divizibil cu 88, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

16. Arătați că numărul $a = 4 \cdot 5^{6n+4} + 6 \cdot 5^{6n+6} - 2 \cdot 5^{6n+5}$ este pătrat perfect, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

17. Arătați că $11 \mid A$, unde $A = 8^{n+1} \cdot 5^{3n} + 2^{3n+2} \cdot 125^n - 4^n \cdot 5^{2n} \cdot 10^n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

18. Arătați că numărul $A = 2^{3n+2} \cdot 25^{n+1} - 8^{n+1} \cdot 5^{2n+1} - 3 \cdot 4^n \cdot 5^{n+1} \cdot 10^n$ este divizibil cu 9, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

19. Fie $a = 4^{2n+3} + 3 \cdot 16^{n+1} + 36 \cdot 4^{2n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că numărul a este pătrat perfect.

20. Arătați că $13 \mid a$, unde $a = 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{48}$.

21. Arătați că $10 \mid a$, unde $a = 7 + 7^2 + 7^3 + \ldots + 7^{64}$.

22. Demonstrați că numărul $a = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{2011}$ este divizibil cu 15.

23. Arătați că $31 \mid a$, unde $a = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{2019}$.

24. Arătați că numărul $a = 3^0 + 3^1 + 3^2 + \ldots + 3^{2015}$ este divizibil cu 10.

25. Determinați elementele mulțimii A în fiecare dintre cazurile:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x + 3 \mid 12\}$; b) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x + 1 \mid 15\}$;

c) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x - 1 \mid 27\}$; d) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 5 \mid 16\}$.

26. Determinați valorile naturale ale lui x pentru care:

a) $x + 1 \mid x + 6$; b) $x + 2 \mid 2x + 29$; c) $2x - 1 \mid 4x + 19$;

d) $2x + 1 \mid 7x + 23$; e) $2x + 5 \mid 7x + 29$; f) $3x + 4 \mid 5x + 17$.

27. Arătați că fracțiile următoare sunt ireductibile, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{3n+11}{4n+15}, \frac{6n+13}{4n+9}, \frac{2n+5}{3n+8}, \frac{4n+9}{5n+11}, \frac{3n+4}{5n+7}, \frac{2n+3}{3n+4}.$$

28. Determinați mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \mid 48 \text{ și } x \mid 32\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 12 \mid x \text{ și } 14 \mid x, \text{ iar } x < 300\}$ și $C = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$.

29. Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x + 1 \mid 15\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x + 1 \mid 18\}$. Determinați card$(A \cap B)$.

30. Determinați elementele mulțimii A în fiecare dintre situațiile următoare:

a) $A = \left\{x \in \mathbb{N} \middle| \frac{21}{2x+1} \in \mathbb{N}\right\}$; b) $A = \left\{x \in \mathbb{N} \middle| \frac{18}{2x-1} \in \mathbb{Z}\right\}$;

c) $A = \left\{x \in \mathbb{N} \middle| \frac{7x+9}{2x-1} \in \mathbb{N}\right\}$; d) $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \middle| \frac{5x+13}{2x+1} \in \mathbb{Z}\right\}$.

31. Determinați perechile de numere naturale (a, b) pentru care:

a) $(a; b) = 12$ și $a \cdot b = 2160$; b) $(a; b) = 15$ și $a \cdot b = 3150$;

c) $(a; b) = 15$ și $a + b = 120$; d) $(a; b) = 18$ și $[a; b] = 270$.

32. Aflați cel mai mic număr natural nenul care împărțit la 20, 24 și 28 dă, de fiecare dată, restul 12.

33. Aflați cel mai mic număr natural nenul care împărțit la 12 dă restul 11, împărțit la 16 dă restul 15 și împărțit la 18 dă restul 17.

34. Dacă se numără creioanele dintr-o cutie grupându-le câte 10 sau câte 12 sau câte 15, se observă că rămân de fiecare dată 3 creioane negrupate.

a) În cutie pot fi 63 de creioane?

b) Care este numărul de creioane mai mare decât 150 și mai mic decât 200 care îndeplinește condițiile problemei?

35. Elevii unei școli s-au aliniat pe terenul de sport câte 7 și 5 elevi au rămas nealiniați. Când s-au aliniat câte 10, au rămas 8 elevi nealiniați, iar când au încercat să se alinieze pe rânduri de câte 15, au rămas 13 elevi nealiniați.

a) Care este numărul minim de elevi ce pot fi în școală?

b) Dacă numărul elevilor este cuprins între 400 și 450, atunci care este numărul elevilor din școală?

36. Pe un teren de sport sunt mai puțin de 220 de elevi. Dacă aceștia se așază în coloane de câte 8, rămân pe margine 4 elevi, dacă se așază în coloane de câte 9, rămân pe margine 5 elevi, iar dacă se dispun în coloane de câte 12, rămân pe margine 8 elevi. Știind că toți elevii se pot așeza în coloane de câte 5, fără a rămâne vreun elev pe margine, aflați câți elevi sunt pe terenul de sport.

37. Elevii de gimnaziu dintr-o școală au organizat concursuri sportive de baschet, volei și handbal. Numărul elevilor era cuprins între 620 și 640. Dacă s-ar fi format numai echipe de baschet (câte cinci elevi într-o echipă), ar fi rămas doi elevi necuprinși în echipe. Dacă s-ar fi format numai echipe de volei (câte șase elevi într-o echipă), ar fi rămas trei elevi pe dinafară și dacă s-ar fi format numai echipe de handbal (câte șapte elevi în echipă), ar fi rămas patru elevi necuprinși într-o echipă. Aflați numărul echipelor de baschet care se puteau forma.

38. Numerele naturale 1905 și 445 împărțite prin același număr natural nenul n dau resturile 15 și, respectiv, 13. Determinați valorile lui n.

39. Într-o grădiniță, pentru cadourile de Crăciun ale copiilor s-au cumpărat 731 de pachete de biscuiți și 835 de ciocolate. Când au fost împărțite în mod egal la toți copiii din grădiniță, au rămas 11 pachete de biscuiți și 19 ciocolate. Care este cel mai mare număr posibil de copii din grădiniță?

40. a) Arătați că produsul a două numere naturale consecutive se divide cu 2.

b) Arătați că produsul a trei numere naturale consecutive se divide cu 6.

41. Arătați că numărul $a = n^2 + n + 6$ este număr par.

42. Arătați că suma multiplilor naturali de două cifre ai lui 12 este un număr divizibil cu 16.

43. Determinați numerele prime a, b și c care îndeplinesc condiția:

a) $a + 4b + 2c = 24$; b) $a + 6b + 12c = 117$.

44. Aflați numerele naturale x și y, știind că:

a) $(x + 2)(x + 3) = 56$; b) $(x + 4)(y + 6) = 96$;

c) $(x + 2)(x + 3) = 18(x + 2)$; d) $4x + 9y = 84$.

45. Calculați suma tuturor numerelor naturale de forma $\overline{abc}$ care verifică egalitatea:

$$3(\overline{ab} + c) = 4(\overline{ab} - c).$$

46. Determinați trei numere naturale, știind că dacă se calculează mediile aritmetice a câte două dintre ele se obțin valorile 36, 48 și 54.

PE-PP 2. Rapoarte. Proporţii. Proporţionalitate

1. a) Dacă $\frac{x}{3} = \frac{4}{y}$, calculați valoarea numărului $a = 5xy$.

b) Dacă $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$, calculați valoarea raportului $\frac{2x - y}{5x - 3y}$.

c) Dacă $\frac{5x}{3y} = \frac{10}{9}$, calculați valoarea raportului $\frac{5x - 3y}{2x + y}$.

PE-PP Recapitulare şi sistematizare prin teste

TESTUL 1

Subiectul I

1. Rezultatul calculului $3^2 \cdot 7 - 5 \cdot 2^2$ este … .

2. Media geometrică a numerelor 8 și 18 este … .

3. Cei 9 băieți dintr-o clasă reprezintă 30% din elevii clasei. Numărul de elevi din clasă este egal cu … .

4. Valoarea reală a lui x din proporția $\frac{x}{45} = \frac{36}{60}$ este … .

5. Rezultatul calculului $2\sqrt{3}(\sqrt{27} - \sqrt{75})$ este … .

6. Fie mulțimea $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x \leq 15\}$. Probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea A, acesta să fie număr prim este egală cu … .

Subiectul al II-lea

1. După o reducere de 15%, prețul unui obiect este de 119 lei. Care ar fi fost prețul obiectului, dacă acesta nu s-ar fi redus, ci s-ar fi majorat cu 15%?

2. Rezolvați ecuația $\frac{(x+2)^2}{2} - \frac{(x+3)(x-3)}{3} = \frac{2x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{6}$.

3. Calculați media geometrică a numerelor $a = \frac{1}{2-\sqrt{3}} + \sqrt{7+4\sqrt{3}}$ și $b = 2 - \sqrt{3} + \frac{1}{2+\sqrt{3}}$.

Subiectul al III-lea

1. a) Descompuneți în produs de factori ireductibili: $x^2 + 5x + 6$ și $x^2 + 2x - 8$.

b) Pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, -3, -2, 2, 4\}$, aduceți la forma cea mai simplă expresia:

$$E(x) = \frac{x^2-4}{x^2+5x+6} \cdot \frac{x^2+6x+9}{x^2+2x-8} - \frac{x+1}{x-4} - \frac{8}{x^2-16}.$$

c) Determinați valorile întregi ale lui n pentru care $E(n) \in \mathbb{Z}$.

2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax - 4$ și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = bx + 1$.

a) Determinați numerele reale a și b, știind că punctul $A(1; -2)$ este punctul de intersecție a graficelor celor două funcții.

b) Pentru $a = 2$ și $b = -3$, reprezentați grafic cele două funcții în același sistem de axe de coordonate.

c) Dacă $G_f \cap Ox = \{B\}$ și $G_g \cap Ox = \{C\}$, calculați aria triunghiului ABC.

Geometrie

Capitolul I
Arii şi volume

PP Competenţe specifice

C1. Identificarea corpurilor geometrice şi a elementelor metrice necesare pentru calcularea ariei sau a volumului acestora

C2. Prelucrarea unor date caracteristice ale corpurilor geometrice studiate în vederea calculării unor elemente ale acestora

C3. Alegerea metodei adecvate pentru calcularea unor caracteristici numerice ale corpurilor geometrice

C4. Utilizarea unor termeni şi expresii specifice pentru descrierea proprietăţilor figurilor şi corpurilor geometrice

C5. Analizarea condiţiilor necesare pentru ca o configuraţie geometrică spaţială să verifice anumite cerinţe date

C6. Interpretarea informaţiilor referitoare la distanţe, arii şi volume după modelarea printr-o configuraţie spaţială a unei situaţii date de cotidian

PE-PP 1. Distanţe şi măsuri de unghiuri pe feţele sau în interiorul corpurilor geometrice studiate

● ● ● activităţi de învăţare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. O prismă dreaptă $ABCDA'B'C'D'$ are la bază un pătrat de latură $AB = 4$ cm, iar înălțimea $AA' = 4\sqrt{3}$ cm. Aflați:

a) măsura unghiului format de muchiile CC' și AB;
b) măsura unghiului format de diagonala BC' cu latura AD;
c) măsura unghiului format de diagonala AC cu planul (ADD').

2. Prisma dreaptă $ABCDA'B'C'D'$ are la bază un pătrat cu latura $AB = 6\sqrt{2}$ cm și diagonala $BD' = 15$ cm. Aflați:

a) sinusul unghiului format de diagonala BD' cu planul (ABC);
b) sinusul unghiului format de diagonala BD' cu fața (ADD').

3. Fie $ABCDA'B'C'D'$ o prismă regulată dreaptă cu latura bazei $AB = 6\sqrt{3}$ cm și înălțimea $AA' = 6$ cm. Calculați:

a) măsura unghiului format de diagonala AD' cu planul (ABC);
b) măsura unghiului format de diagonala $D'C$ cu planul (ADD');
c) măsura unghiului plan corespunzător diedrului format de planele (ADD') și (BDD').

4. Paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are dimensiunile $AB = 12$ cm, $BC = 9$ cm și diagonala $BD' = 25$ cm. Aflați:

a) distanța de la punctul C la diagonala AC';
b) sinusul unghiului format de diagonala AC' cu planul (BCC');
c) tangenta unghiului plan corespunzător diedrului format de planele $(C'AB)$ și (ABC).

5. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub cu latura $AB = 6$ cm. Calculați:

a) distanța de la punctul C' la diagonala BD;
b) măsura unghiului format de diagonalele BC' și AB';
c) distanța de la C la planul $(C'BD)$.

6. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub cu latura $AB = 12$ cm. Calculați:

a) măsura unghiului format de diagonala AD' cu planul (BDD');
b) sinusul unghiului format de diagonala BD' cu planul (ABC);
c) distanța de la A la diagonala BD'.

7. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată cu latura bazei $AB = 12$ cm și înălțimea $AA' = 6$ cm. Calculați:

a) distanța de la A' la latura BC;
b) măsura unghiului plan corespunzător diedrului format de planele $(A'BC)$ și (ABC).

8. Piramida triunghiulară regulată $VABC$ are latura bazei $AB = 18$ cm și înălțimea $VO = 3\sqrt{6}$ cm. Calculați:

a) sinusul unghiului format de o muchie laterală cu planul bazei;
b) măsura unghiului format de muchia VB cu planul (VAD), unde D este mijlocul laturii BC;
c) tangenta unghiului plan corespunzător diedrului format de o față laterală cu planul bazei.

9. Piramida patrulateră regulată $VABCD$ are $AB = VA = 12$ cm. Calculați:

a) măsura unghiului format de o muchie laterală cu planul bazei;
b) măsura unghiului format de muchia VB cu planul (VAC);
c) măsura unghiului format de latura BC cu planul (VAC).

10. Piramida patrulateră regulată $VABCD$ are latura bazei $AB = 20$ cm și măsura unghiului format de o față laterală cu planul bazei egală cu $45°$, cu $AC \cap BD = \{O\}$ și $VO \perp (ABC)$.

a) Calculați măsura unghiului diedru format de planele (VAC) și (VBD).
b) Calculați distanța de la B la planul (VAC).
c) Dacă $P \in VO$, astfel încât distanța de la P la planul (ABC) este egală cu distanța de la P la fața (VBC), aflați lungimea segmentului PO.

PE Aplicare și exersare **

11. Fie $ABCDA'B'C'D'$ o prismă regulată dreaptă cu latura bazei $AB = 6\sqrt{2}$ cm și diagonala $BC' = 12$ cm. Aflați:

a) distanța de la punctul D' la diagonala AC;
b) distanța de la punctul D la planul $(D'AC)$;
c) tangenta unghiului diedru format de planele $(D'AC)$ și (ABC).

c) Calculați măsura unghiului plan corespunzător diedrului determinat de planele (VAB) și (VAD).

22. Piramida triunghiulară regulată $VABC$ are înălțimea VO = 6 cm, iar distanța de la centrul O al bazei la fața (VBC) egală cu $3\sqrt{3}$ cm. Calculați:

a) latura AB a bazei;

b) distanța de la A la planul (VBC);

c) măsura unghiului diedru format de planul (VBC) cu planul (ABC).

23. Piramida patrulateră regulată $VABCD$ are apotema VM = 12 cm, unde M este mijlocul laturii BC și $\sphericalangle((VBC), (ABC)) = 45°$. Calculați:

a) latura AB a bazei;

b) măsura unghiului diedru format de fețele (VBC) și (VAD);

c) distanța de la O, centrul bazei, la o față laterală.

PE Aprofundare și performanță ***

24. Paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are dimensiunile $AB = 8\sqrt{3}$ cm, BC = 8 cm și $AA' = 8\sqrt{3}$ cm. Aflați:

a) distanța de la vârful B' la diagonala AD';

b) distanța de la vârful C' la diagonala BD;

c) măsura unghiului format de dreapta AD' cu planul (DCC').

25. Paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are dimensiunile AB = 20 cm, AA' = 12 cm și BC = 15 cm. Calculați:

a) tangenta unghiului format de diagonala $B'D$ cu planul (ABC);

b) distanța de la C la planul ($C'BD$);

c) sinusul unghiului format de muchia BC cu planul ($C'BD$).

26. Un cub $ABCDA'B'C'D'$ are diagonala egală cu $8\sqrt{3}$ cm. Calculați:

a) măsura unghiului diedru format de planele (ACC') și (BCC');

b) măsura unghiului format de diagonala BC' cu $D'O$, unde $\{O\} = AC \cap BD$;

c) măsura unghiului format de BC' cu MO, unde $\{M\} = AD' \cap DA'$.

27. Cubul $ABCDA'B'C'D'$ are diagonala bazei egală cu $18\sqrt{2}$ cm. Fie $M \in CC'$, astfel încât $CM \equiv MC'$. Aflați:

a) distanța de la D' la dreapta de intersecție a planelor ($D'BM$) cu (ABC);

b) tangenta unghiului plan corespunzător diedrului determinat de planul ($D'BM$) cu planul (ABC).

28. Prisma regulată $ABCA'B'C'$ are latura bazei AB = 6 cm și înălțimea $AA' = 6\sqrt{2}$ cm. Calculați:

a) măsura unghiului format de dreptele $A'C$ și BC';

b) distanța de la punctul A' la dreapta de intersecție a planelor (ABC) cu ($A'BM$), unde punctul $M = \text{sim}_C A$.

29. Prisma regulată dreaptă $ABCA'B'C'$ are latura bazei AB = 6 cm și diagonala $A'B$ = 12 cm, iar M este mijlocul muchiei CC'. Calculați:

a) distanța de la M la diagonala $A'B$;

b) distanța de la A' la dreapta de intersecție a planelor ($A'BM$) și (ABC);

c) măsura unghiului diedru determinat de planele ($A'MB$) și (ABC).

38. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu latura $AB = 12$ cm și punctul E mijlocul lui AD, iar $A'C' \cap B'D' = \{O'\}$. Calculați:

a) tangenta unghiului format de dreapta $O'A$ cu planul $(D'BD)$;

b) distanța de la vârful C' la dreapta BE;

c) tangenta unghiului diedru format de planele $(C'BE)$ și (ABC).

39. Fie prisma regulată $ABCDA'B'C'D'$ cu latura bazei $AB = 8\sqrt{2}$ cm și înălțimea $AA' = 8$ cm, iar punctele E, F și G sunt mijloacele segmentelor AA', BB' și, respectiv, AD'.

a) Arătați că dreptele BE și CG sunt coplanare.

b) Calculați măsura unghiului format de dreptele BE și $A'D'$.

c) Calculați tangenta unghiului format de dreptele BD' și $C'F$.

40. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic cu $AB = 6\sqrt{2}$ cm, $BC = 6$ cm și $AA' = 6\sqrt{2}$ cm, iar punctele M, N și P sunt mijloacele segmentelor $A'B$, AD' și, respectiv, AA'.

a) Arătați că dreptele BP și CN sunt coplanare.

b) Calculați măsura unghiului format de dreptele PM și BC.

c) Calculați măsura unghiului format de dreptele $D'M$ și BC.

PE-PP 2. Prisma patrulateră regulată dreaptă. Paralelipipedul dreptunghic

O dreaptă care alunecă pe un poligon oarecare și rămâne paralelă cu o dreaptă fixă (care nu este paralelă cu planul poligonului director) descrie o suprafață prismatică.

Atunci când tăiem suprafața prismatică cu două plane paralele, care să nu fie paralele cu generatoarea, delimităm un corp numit **prismă**.

Suprafața prismatică determină pe cele două plane paralele două poligoane numite **bazele prismei**. **Fețele prismei**, diferite de baze, se numesc **fețe laterale** ale prismei, ele fiind paralelograme.

Segmentele după care se taie câte două fețe laterale ale prismei se numesc muchiile laterale ale prismei. Când muchiile laterale ale prismei sunt perpendiculare pe planul bazei, **prisma este dreaptă**.

Distanța dintre bazele prismei se numește înălțimea prismei. La o prismă dreaptă, muchia laterală este egală cu înălțimea.

O prismă dreaptă care are ca bază un poligon regulat se numește prismă regulată.

O prismă care are ca bază un paralelogram se numește paralelipiped.

Toate fețele unui paralelipiped sunt paralelograme.

Paralelipipedul cu muchiile laterale perpendiculare pe planul bazei se numește *paralelipiped drept.*

Paralelipipedul drept care are ca bază un dreptunghi se numește *paralelipiped dreptunghic.*

Paralelipipedul dreptunghic în care toate muchiile sunt egale se numește *cub.*

PE-PP Probleme de matematică aplicată în viaţa cotidiană

1. Remorca unui autocamion este de forma unui paralelipiped cu lungimea de 6 m, lățimea de 3 m și înălțimea de 2 m. Deoarece remorca trebuie încărcată cu niște cutii de marfă în formă paralelipipedică, având lungimea de 1,2 m, lățimea de 1 m și înălțimea de 0,9 m, șoferul vrea să determine câte cutii au loc și ce volum ocupă ele. Ajutați-l voi!

2. Un bazin pentru apă, de forma unui paralelipiped lung de 3,20 m, lat de 2,6 m și înalt de 50 dm, se vopsește pe exterior. Știind că dintr-un litru de vopsea se pot acoperi aproximativ 10 m^2 de perete, aflați de câți litri de vopsea este nevoie pentru a vopsi pereții bazinului.

3. Într-un acvariu cu dimensiunile bazei de 80 cm și 30 cm, iar înălțimea de 60 cm (figura 1), se toarnă apă până la înălțimea de 40 cm. Se introduc în apă 240 de pietricele, fiecare cu un volum de 2 cm^3. Cu cât se va ridica apa în acvariu?

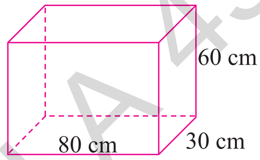


Fig. 1

4. O piscină are forma unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 12 m, 5 m și înălțimea de 1,5 m.

a) Câți hectolitri de apă sunt necesari pentru umplerea piscinei?

b) Dacă din piscină se evacuează 7200 ℓ de apă, calculați cu câți centimetri va scădea nivelul apei din piscină.

5. Dintr-un dreptunghi de carton (figura 2), cu dimensiunile $AB = 60$ cm și $BC = 50$ cm, se decupează la colțuri câte un pătrat cu latura de 15 cm. Dacă se îndoaie benzile laterale rămase și apoi se lipesc pe muchii, se obține o cutie. Care este volumul pe care îl va avea cutia astfel obținută?

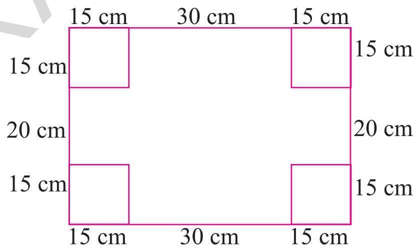


Fig. 2

6. Aflați volumul de aer dintr-o sală de clasă cu următoarele dimensiuni: lungimea 13 m, lățimea 8,5 m și înălțimea 3,5 m. Câți elevi pot învăța în această clasă, socotind câte 10 m^3 de aer necesari pentru fiecare elev?

7. Un acvariu are forma unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 70 cm, 60 cm și înălțimea de 40 cm.

a) Dacă în acvariu se pune apă până la înălțimea de 30 cm, aflați câți litri de apă se introduc în acvariu.

b) Arătați că cea mai mare distanță posibilă între doi pești din acvariu este mai mică de 11 dm.

8. Un șef de șantier vrea să afle câte autobasculante sunt necesare pentru a transporta pământul rezultat din săparea unui șanț de forma unui paralelipiped dreptunghic cu lungimea de 7 m, lățimea de 2,5 m și adâncimea de 3,5 m, știind că 1 m^3 de pământ cântărește 2 t și că fiecare autobasculantă poate fi încărcată în medie cu 3500 kg. Ajutați-l voi!

9. Pământul scos de la săparea unei pivnițe în formă de paralelipiped dreptunghic cu lungimea de 6 m, lățimea de 4 m și adâncimea de 3,75 m se așterne într-o grădină de formă dreptunghiulară cu dimensiunile de 0,4 hm și 2,5 dam. Cu cât se va înălța stratul de pământ așternut în această grădină?

PE-PP Recapitulare şi sistematizare prin teste

✹ TESTUL 1 ✹

Subiectul I

1. Dacă un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile egale cu 9 cm, 12 cm și 20 cm, atunci lungimea diagonalei paralelipipedului este egală cu … cm.

2. Dacă un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile bazei egale cu 18 cm și 24 cm, iar înălțimea lui este de 40 cm, atunci tangenta unghiului format de diagonala paralelipipedului cu planul bazei este egală cu … .

3. Dacă un cub are diagonala egală cu $6\sqrt{3}$ cm, atunci aria cubului este egală cu … cm^2.

4. Dacă o prismă triunghiulară regulată dreaptă are latura bazei egală cu 6 cm și aria laterală de 144 cm^2, atunci înălțimea prismei este … cm.

5. Dacă o prismă triunghiulară regulată dreaptă are raza cercului circumscris bazei egală cu $4\sqrt{3}$ cm și aria laterală de 360 cm^2, atunci volumul prismei este … cm^3.

6. Dacă suma tuturor muchiilor unui paralelipiped dreptunghic este egală cu 96 cm, iar lungimea diagonalei acestuia este de $8\sqrt{3}$ cm, atunci aria totală a paralelipipedului este … cm^2.

7. Dacă volumul unui cub este egal cu 512 cm^3, atunci aria cubului este egală cu … cm^2.

8. Dacă într-un paralelipiped dreptunghic lungimile diagonalelor fețelor sale sunt egale cu 20 cm, $4\sqrt{34}$ cm și $4\sqrt{41}$ cm, atunci lungimea diagonalei paralelipipedului este de … cm.

9. Dacă dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic sunt direct proporționale cu numerele 3, 4 și 6, iar suma lor este 26 cm, atunci volumul paralelipipedului este egal cu … cm^3.

Subiectul al II-lea

1. Un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are dimensiunile $AB = 6\sqrt{3}$ cm, $BC = 6$ cm și $AA' = 12$ cm. Calculați:
a) diagonala paralelipipedului;
b) distanța de la punctul A la dreapta BC';
c) măsura unghiului format de diagonala AC' cu planul (ABC).

2. O prismă regulată dreaptă $ABCDA'B'C'D'$ cu baza un pătrat are latura bazei $AB = x$ cm $(x > 0)$ și muchia $AA' = x\sqrt{3}$ cm $(x > 0)$. Dacă $AD' \cap A'D = \{O\}$, astfel încât $C'O = 12\sqrt{2}$ cm, calculați:
a) lungimea laturii AB, determinând valoarea lui x;
b) aria triunghiului $C'OB$;
c) sinusul unghiului determinat de dreptele BO și AC;
d) aria totală și volumul prismei.

3. Un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are diagonala $AC' = 12\sqrt{2}$ cm. Dacă $BD' \perp A'C$ și $\sphericalangle((B'AD), (ABC)) = 60°$, calculați:
a) aria totală și volumul paralelipipedului;
b) sinusul unghiului format de dreapta BD' cu planul (ADD');
c) distanța de la punctul A' la dreapta MC, unde M este mijlocul laturii AB.

18. Media aritmetică a lungimilor razei și generatoarei unui cilindru circular drept este egală cu 15, iar aria totală a cilindrului este 720π cm^2. Calculați:

a) raza și generatoarea cilindrului; b) aria laterală și volumul cilindrului.

19. Aria laterală a unui cilindru circular drept este egală cu 120π cm^2, iar volumul acestuia este de 360π cm^3. Calculați:

a) raza și generatoarea cilindrului; b) aria totală a cilindrului.

PE-PP **Supermate ******

20. Doi cilindri circulari drepți au același volum, razele și generatoarele fiind diferite. Arătați că generatoarele lor sunt invers proporționale cu pătratele razelor lor.

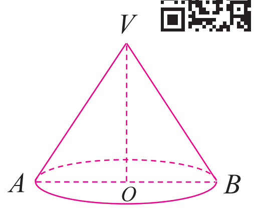
21. Un cilindru circular drept are volumul egal cu 2160π cm^3. Dacă s-ar mări generatoarea cu 5 cm, atunci volumul noului cilindru ar deveni 2880π cm^3. Calculați:

a) raza și generatoarea cilindrului;

b) aria laterală și aria totală ale cilindrului.

PE-PP 8. Conul circular drept

Elementele conului circular drept:



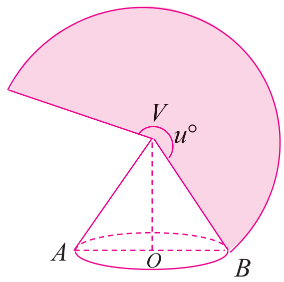
- baza conului este cercul de centru O și rază R;
- înălțimea conului: $VO = h$ este egală cu distanța de la vârful V la planul bazei;
- generatoarea conului: $G = VA$.

În ΔVOA dreptunghic: $G^2 = h^2 + R^2$.

Desfășurarea conului: Suprafața laterală a conului circular drept se desfășoară într-un plan după un sector circular cu centrul în V și raza $VA = G$.

Dacă se notează cu $u°$ măsura unghiului la centru corespunzător sectorului de cerc din desfășurarea conului, avem:

$$u° = 360° \cdot \frac{R}{G}.$$



Formule utile:

$$\mathcal{A}_l = \pi RG; \qquad \mathcal{A}_t = \pi R(R + G); \qquad \mathcal{V} = \frac{\pi R^2 h}{3}.$$

Triunghiul VAB se numește **secțiunea axială** a conului circular drept.

● ● ● activităţi de învăţare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. În tabelul următor, notațiile sunt cele uzuale într-un con circular drept. Dimensiunile sunt măsurate în centimetri. Completați tabelul.

	R	h	G	$\mathcal{A}_b$	$\mathcal{A}_l$	$\mathcal{A}_t$	$\mathcal{V}$
a)	6	8					
b)	12		20				
c)		12	13				
d)	10						800π
e)			15		180π		
f)				64π			128π

2. Un con circular drept are raza bazei egală cu 18 cm și înălțimea de 24 cm. Calculați:
a) G; b) $\mathcal{A}_l$; c) $\mathcal{A}_t$; d) $\mathcal{V}$.

3. Un con circular drept are raza bazei egală cu 9 cm și generatoarea de 15 cm. Calculați:
a) h; b) $\mathcal{A}_l$; c) $\mathcal{V}$; d) $u°$.

4. Un con circular drept are generatoarea de 30 cm și înălțimea de 18 cm. Calculați:
a) R; b) $\mathcal{A}_t$; c) $\mathcal{V}$; d) $u°$.

PE Aplicare și exersare **

5. Un con circular drept are $R = 16$ cm și $\mathcal{A}_l = 320\pi$ cm^2. Calculați:
a) G; b) h; c) $\mathcal{V}$.

6. Un con circular drept are $\mathcal{A}_l = 500\pi$ cm^2 și $\mathcal{A}_t = 900\pi$ cm^2. Calculați:
a) R; b) G; c) h; d) $\mathcal{V}$.

7. Calculați măsura unghiului la centru al unui sector circular care reprezintă desfășurarea suprafeței laterale a unui con circular drept, în următoarele cazuri:
a) $h = 16$ cm; $G = 20$ cm; b) $G = 25$ cm; $R = 20$ cm; c) $R = 9$ cm; $G = 15$ cm.

8. Un con circular drept are raza bazei egală cu 6 cm. Desfășurarea suprafeței laterale a conului este un sector circular care are măsura unghiului la centru egală cu $u°$. Calculați aria laterală a conului în următoarele situații:
a) $u° = 180°$; b) $u° = 144°$; c) $u° = 216°$;
d) $u° = 90°$; e) $u° = 288°$; f) $u° = 135°$.

9. Un con circular drept are secțiunea axială un triunghi echilateral cu latura de 24 cm.
a) Calculați aria laterală, aria totală și volumul conului.
b) Aflați măsura unghiului la centru corespunzător sectorului de cerc obținut prin desfășurarea suprafeței laterale a conului.

10. Secțiunea axială a unui con circular drept este un triunghi isoscel cu un unghi de 120°. Știind că $R = 12$ cm, calculați:
a) h; b) G; c) $\mathcal{A}_l$; d) $\mathcal{V}$.

11. Un con circular drept are $\mathcal{A}_l = 135\pi$ cm^2 și $R = 9$ cm. Calculați:
a) G; b) h; c) $\mathcal{V}$; d) $u°$.

12. Un con circular drept are aria bazei egală cu 144π cm^2 și volumul egal cu 768π cm^3. Calculați:

a) h; b) G; c) $\mathcal{A}_t$; d) $u°$.

13. Într-un con circular drept, $\mathcal{A}_l = 1500\pi$ cm^2 și $\mathcal{A}_t = 2400\pi$ cm^2. Calculați:

a) volumul conului;

b) măsura unghiului la centru corespunzător sectorului de cerc obținut prin desfășurarea laterală a conului.

14. Un con circular drept are raza bazei de 12 cm și înălțimea de 16 cm. Se secționează conul cu un plan paralel cu baza, dus la $\frac{3}{4}$ din înălțime față de vârf. Aflați volumul și aria totală ale conului mic care se formează prin secționare.

15. Un con circular drept are $R = 32$ cm și $h = 24$ cm. Calculați:

a) aria laterală, aria totală și volumul conului;

b) la ce distanță de planul bazei trebuie dus un plan paralel cu baza, astfel încât aria cercului de secțiune să fie egală cu 144π cm^2.

PE Aprofundare și performanță ***

16. Un con circular drept are aria totală egală cu 180π cm^2, iar media aritmetică dintre rază și generatoare este 18. Calculați:

a) R; b) G; c) $\mathcal{V}$; d) $\mathcal{A}_l$.

17. Un con circular drept are $R = 18$ cm și $h = 24$ cm.

a) Calculați aria laterală, aria totală și volumul conului.

b) Calculați măsura unghiului la centru corespunzător sectorului de cerc obținut prin desfășurarea laterală a conului.

c) Se secționează conul cu un plan paralel cu baza dus la $\frac{2}{3}$ din înălțime față de vârf. Aflați volumul și aria totală ale conului mic astfel obținut.

18. Suprafața laterală a unui con circular drept provine dintr-un sector circular, având unghiul la centru cu măsura de 216° și raza cercului sectorului egală cu 15 cm.

a) Calculați aria totală și volumul conului.

b) Calculați la ce distanță de planul bazei trebuie dus un plan paralel cu baza, astfel încât ariile laterale ale celor două corpuri formate să fie egale.

c) Dacă se secționează conul cu un plan paralel cu baza dus la $\frac{1}{3}$ din înălțime față de bază, aflați aria laterală și volumul conului mic astfel obținut.

19. Desfășurarea laterală a unui con circular drept este un sector de cerc, având raza egală cu 36 cm, iar unghiul la centru egal cu 120°. Calculați:

a) volumul și aria totală ale conului;

b) la ce distanță de planul bazei trebuie dus un plan paralel cu baza, astfel încât aria cercului de secțiune să fie egală cu 64π cm^2.

20. Desfășurarea laterală a unui con circular drept este un semicerc cu raza de 24 cm.

a) Calculați aria totală și volumul conului.

b) Aflați aria totală și volumul trunchiului de con obținut prin secționarea conului cu un plan paralel cu baza, astfel încât aria laterală a conului mic astfel obținut să fie o treime din aria laterală a trunchiului de con.

PE **Nume** ____ **Clasa** _______

Test de autoevaluare

• *Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.*

I. Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Un cilindru cu raza de 8 cm și generatoarea de 5 cm are aria totală de .... cm^2.

(0,5p) **2.** Un con circular drept cu raza de 12 cm și generatoarea de 20 cm are înălțimea egală cu .... cm.

(0,5p) **3.** Un cilindru circular drept cu secțiunea axială un pătrat cu latura de 18 cm are volumul egal cu .... cm^3.

(0,5p) **4.** Conul circular drept cu raza de 8 cm și înălțimea de 12 cm are volumul ...... cm^3.

(0,5p) **5.** Un cilindru circular drept cu raza de 10 cm și volumul de 900π cm^3 are generatoarea de .... cm.

(0,5p) **6.** Secțiunea axială a unui con circular drept este un triunghi isoscel cu perimetrul de 80 cm și baza egală cu 30 cm. Aria totală a conului este egală cu .... cm^2.

II. Încercuiți răspunsul corect. (2 puncte)

(0,5p) **1.** Secțiunea axială a unui cilindru circular drept este un pătrat cu diagonala de $8\sqrt{2}$ cm. Volumul cilindrului este egal cu:

A. 64π cm^3 B. 256π cm^3 C. 128π cm^3 D. 108π cm^3

(0,5p) **2.** Conul circular drept cu volumul egal cu 288π cm^3 și înălțimea de 6 cm are aria laterală egală cu:

A. $144\sqrt{3}\pi$ cm^2 B. $144\sqrt{5}\pi$ cm^2 C. $108\sqrt{5}\pi$ cm^2 D. $72\sqrt{5}\pi$ cm^2

(0,5p) **3.** Un cilindru circular drept cu aria laterală egală cu 192π cm^2 și raza de 12 cm are volumul egal cu:

A. 1152π cm^3 B. 864π cm^3 C. 1440π cm^3 D. 576π cm^3

(0,5p) **4.** Un con circular drept are aria laterală egală cu 72π cm^2 și aria totală egală cu 108π cm^2. Volumul conului este egal cu:

A. $108\sqrt{3}\pi$ cm^3 B. $72\sqrt{3}\pi$ cm^3 C. $144\sqrt{5}\pi$ cm^3 D. $144\sqrt{3}\pi$ cm^3

III. Scrieți rezolvările complete. (4 puncte)

1. Un cilindru circular drept are generatoarea egală cu dublul razei, iar desfășurarea laterală este un dreptunghi cu aria egală cu 144 cm^2. Calculați:

(1p) a) raza și generatoarea cilindrului;

(1p) b) aria totală și volumul cilindrului.

2. Un con circular drept are înălțimea egală cu 24 cm, iar raza bazei egală cu 75% din înălțime.

(0,5p) a) Calculați volumul și aria totală ale conului.

(0,5p) b) Aflați măsura unghiului la centru corespunzător sectorului de cerc obținut prin desfășurarea laterală a conului.

(1p) c) Se duce un plan paralel cu baza la $\frac{3}{4}$ din înălțime față de vârful conului. Cât la sută din aria laterală a conului inițial reprezintă aria laterală a conului mic astfel obținut?

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	I.5	I.6	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2
Punctajul												
Nota												

Teste recapitulative

Notă: Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.

TESTUL 1

Subiectul I. Alegeți litera corespunzătoare singurului răspuns corect. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Rezultatul calculului $\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-4)-(-2)\cdot(-3)^2$ este egal cu:

A. –14 B. 20 C. 16 D. –20

(0,5p) **2.** Soluția sistemului $\begin{cases}2x+y=0\\x+2y=-3\end{cases}$ este:

A. (–1, 2) B. (1, 2) C. (–1, –2) D. (1, –2)

(0,5p) **3.** Soluția ecuației $3\cdot(4-6x)=-6$ este:

A. –2 B. 2 C. –1 D. 1

(0,5p) **4.** Un cub cu latura de 2 cm are aria egală cu:

A. 16 cm^2 B. 32 cm^2 C. 16 cm^2 D. 24 cm^2

(0,5p) **5.** Un con cu raza bazei de 8 cm și înălțimea de 6 cm are volumul egal cu:

A. 216π cm^3 B. 128π cm^3 C. 288π cm^3 D. 144π cm^3

(0,5p) **6.** Elevii unei clase au obținut la un test notele prezentate în tabelul următor:

Nota	10	9	8	7	6	5	4
Numărul de elevi	2	3	6	7	5	1	1

Media notelor obținute de elevii clasei la testul dat este:

A. 7,30 B. 7,32 C. 7,40 D. 7,25

Subiectul al II-lea. Scrieți rezolvările complete. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Desenați un trunchi de piramidă triunghiulară regulată.

(0,5p) **2.** Determinați numerele naturale de forma $\overline{ab}$ divizibile cu 3, pentru care $\sqrt{\overline{ab}-\overline{ba}}\in\mathbb{N}$, cu $a\neq b$.

(0,5p) **3.** Într-o clasă sunt 36 de elevi. Determinați numărul băieților din clasă, știind că numărul fetelor este cu 20% mai mic decât numărul băieților.

4. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x-4$.

(0,5p) a) Reprezentați grafic funcția într-un sistem de axe de coordonate.

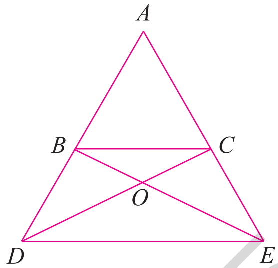
(0,5p) b) Calculați raza cercului circumscris triunghiului determinat de axele de coordonate și de dreapta ce reprezintă graficul funcției.

(0,5p) **5.** Fie expresia $E(x)=x\cdot\left(\frac{x+2}{x+3}:\frac{x^2+7x+10}{x^2+4x+3}+\frac{4}{x+5}\right)$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-5,-3,-2,-1\}$.

Arătați că $E(x)=x$, pentru oricare $x\in\mathbb{R}\setminus\{-5,-3,-2,-1\}$.

Subiectul al III-lea. Scrieți rezolvările complete. (3 puncte)

1. În figura alăturată, triunghiul ABC este echilateral cu $AB = 18$ cm, D este simetricul lui A față de B, iar E este simetricul lui A față de C.



(0,5p) a) Arătați că perimetrul triunghiului ABC este de 54 cm.

(0,5p) b) Arătați că $DC \perp AE$.

(0,5p) c) Dacă $DC \cap BE = \{O\}$, arătați că $AO \perp DE$ și calculați aria triunghiului OCE.

2. Un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm și diagonala $AC' = 13$ cm. Calculați:

(0,5p) a) aria totală și volumul paralelipipedului;

(0,5p) b) valoarea sinusului unghiului format de diagonala BD' cu planul (ADD');

(0,5p) c) valoarea sinusului unghiului format de planele (ADD') și (BDD').

✹ TESTUL 2 ✹

Subiectul I. Alegeți litera corespunzătoare singurului răspuns corect. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Rezultatul calculului $(-2)^2 \cdot (-5) - (-6)^2$ este egal cu:

A. –56 B. –16 C. 56 D. 16

(0,5p) **2.** Dacă 30% dintr-un număr este egal cu 60, atunci numărul este egal cu:

A. 200 B. 300 C. 400 D. 180

(0,5p) **3.** Mulțimea soluțiilor ecuației $2x^2 - 9x + 4 = 0$ este:

A. $\left\{2, \frac{1}{2}\right\}$ B. $\left\{-\frac{1}{2}, 4\right\}$ C. $\left\{\frac{1}{2}, 4\right\}$ D. $\left\{-\frac{1}{2}, -4\right\}$

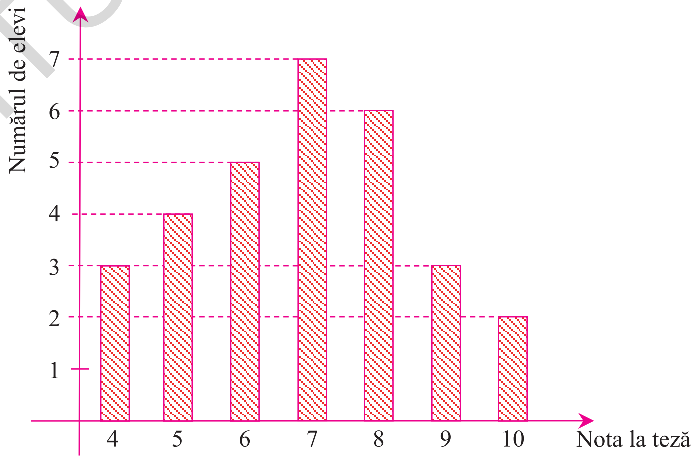
(0,5p) **4.** O sferă are volumul egal cu 288π cm^3. Raza sferei este egală cu:

A. 8 cm B. 12 cm C. 4 cm D. 6 cm

(0,5p) **5.** Un tetraedru regulat are aria egală cu $81\sqrt{3}$ cm^2. Muchia tetraedrului este egală cu:

A. 9 cm B. 18 cm C. 12 cm D. 6 cm

(0,5p) **6.** Rezultatele obținute de elevii unei clase la teza la matematică sunt reprezentate în următoarea diagramă:



Recapitulare şi evaluare finală

Exerciţii şi probleme recapitulative pentru evaluarea finală

ALGEBRĂ

A.

1. Efectuați calculele:

a) $\left(-\frac{1}{125}\right):0,008+0,(7)+0,(3)^2$; b) $\left[0,2(3)-1,2\right]:0,3(2)$.

2. Calculați media aritmetică a numerelor: $5\sqrt{3}-2\sqrt{5}$, $\sqrt{8-2\sqrt{15}}$, $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

3. Calculați media geometrică a numerelor $x=\frac{\sqrt{18}-\sqrt{2}}{\sqrt{12}-\sqrt{3}}$ și $y=\frac{\sqrt{48}-\sqrt{3}}{\sqrt{18}-\sqrt{8}}$.

4. Descompuneți în produs de factori:

a) x^3-2x^2-4x+8; b) $(2x+1)^3-8x-4$;

c) $2(x^2-1)-(x+1)^2$; d) $x^2+5x+6-2(x^2-4)$.

5. Determinați numerele reale x și y, știind că:

a) $x^2+y^2+4x-8y+20=0$; b) $(x-2\sqrt{3})^2+(\sqrt{2}y-6)^2=0$;

c) $(2x+y+4)^2+(x+2y-1)^2=0$; d) $\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{y^2+4y+13}=5$.

6. Arătați că expresia $E(x)=(x^2+2x+2)(x^2+2x+6)+7$ este strict pozitivă pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Determinați valoarea minimă a expresiei.

7. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $\frac{x-2}{5}+\frac{x-1}{2}=\frac{3x-1}{10}$; b) $\left|\frac{2x-1}{3}\right|=1$;

c) $4(x+3)-2|x+3|=2(x+5)+2x$;

d) $(x-3)^2+(x-4)(x+4)=(x+2)^2+x(x-4)+1$;

e) $(2x+1)^2-4(x+3)(x-5)=5(x+3)+4$;

f) $\sqrt{(2x-1)^2}=7$; g) $(x+3)^2-4x=x(x+1)$;

h) $\sqrt{(x-\sqrt{2})^2}=2\sqrt{50}$; i) $2x^2+x-10=0$.

8. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuațiile:

a) $-5(x+2)<25$; b) $(x+5)^2-7x<x(x+2)+21$;

c) $\sqrt{x^2-6x+9}\leq 1$; d) $3(x+5)+2\sqrt{(x+2)^2}\leq 3x+25$;

e) $(x+5)(x-5)+(x+2)^2<x(x+5)+(x-3)^2$;

A.

1. Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile $a = 2\sqrt{11}$ cm, b = 10 cm și c = 9 cm. Calculați:

a) diagonala paralelipipedului;

b) aria totală și volumul paralelipipedului;

c) valoarea sinusului unghiului format de diagonala AC' cu planul (BCC').

2. Un cub $ABCDA'B'C'D'$ are volumul egal cu 512 cm^3. Calculați:

a) latura cubului și diagonala acestuia;

b) valoarea sinusului unghiului plan corespunzător diedrului format de planele $(D'AC)$ și $(B'AC)$;

c) măsura unghiului format de diagonala $D'C$ cu planul (BDD').

3. Un tetraedru regulat $ABCD$ are aria totală egală cu $144\sqrt{3}$ cm^2.

a) Calculați volumul tetraedrului.

b) Dacă M este mijlocul muchiei DC și N este mijlocul muchiei AB, calculați măsura unghiului format de dreapta MN cu muchia AD.

c) Aflați valoarea sinusului unghiului diedru format de planele (AMB) și (ABC).

4. O piramidă patrulateră regulată $VABCD$ are latura bazei egală cu 8 cm și apotema egală cu 5 cm. Calculați:

a) volumul piramidei;

b) distanța de la centrul bazei la o față laterală;

c) valoarea sinusului unghiului diedru format de fețele (VBC) și (VAD).

5. Fie $ABCA'B'C'$ un trunchi de piramidă triunghiulară regulată care are AB = 24 cm, $A'B'$ = 12 cm și apotema egală cu $4\sqrt{3}$ cm. Calculați:

a) volumul trunchiului de piramidă;

b) aria totală și volumul piramidei din care provine trunchiul;

c) tangenta unghiului plan corespunzător diedrului format de planele $(A'BC)$ și (ABC).

6. Un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are $AA' = 6\sqrt{2}$ cm, $BC = 6\sqrt{7}$ cm și aria patrulaterului $ABC'D'$ egală cu 108 cm^2. Calculați:

a) lungimea laturii AB;

b) aria totală și volumul paralelipipedului;

c) valoarea sinusului unghiului format de diagonala AD' cu planul (BDD').

7. O prismă dreaptă $ABCA'B'C'$ are la bază un triunghi echilateral cu latura AB = 8 cm și înălțimea AA' = 6 cm. Se notează $AB' \cap BA' = \{O\}$ și $BC' \cap CB' = \{O'\}$. Aflați:

a) aria laterală și volumul prismei;

b) distanța de la punctul B' la dreapta OO';

c) poziția dreptei OO' față de planul (ABC);

d) sinusul unghiului plan corespunzător diedrului format de planele $(B'AC)$ și $(A'BC')$.

8. Fie $ABCD$ un tetraedru regulat cu latura AB = 6 cm și M mijlocul laturii AC. Aflați:

a) aria totală și volumul tetraedrului;

b) distanța de la M la planul (DBC);

c) distanța de la M la muchia BD.

Modele de teste pentru Evaluarea Naţională

- *Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.*
- *Timpul efectiv de lucru este de 2 ore.*

✹ TESTUL 1 ✹

Subiectul I. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

(5p) **1.** Cel mai mic număr natural de patru cifre distincte, divizibil cu 4, este:
a) 1004; b) 1024; c) 4876; d) 2632.

(5p) **2.** În tabelul de mai jos este prezentată componența claselor din ciclul gimnazial al unui colegiu.

Clasa	a V-a	a VI-a	a VII-a	a VIII-a
Numărul fetelor	47	41	32	33
Numărul băieților	34	37	40	51

Cei mai mulți băieți sunt în clasa:
a) a V-a; b) a VI-a; c) a VII-a; d) a VIII-a.

(5p) **3.** Numărul natural n verifică relația $\frac{1}{2} < \frac{n+1}{18} < \frac{7}{9}$, dacă și numai dacă:
a) $n \in \{8, 9, 10, 11\}$; b) $n \in \{7, 8, 9, 10\}$;
c) $n \in \{9, 10, 11, 12\}$; d) $n \in \{10, 11, 12, 13\}$.

(5p) **4.** Dintre următoarele seturi de numere, cel scris în ordine descrescătoare este:
a) 1,1(6); 1,166; 1,(16); 1,16; b) 1,(16), 1,166; 1,1(6); 1,16;
c) 1,16; 1,1(6); 1,(16); 1,166; d) 1,166; 1,(16); 1,1(6); 1,16.

(5p) **5.** Patru elevi au calculat media geometrică a numerelor $\left(\frac{5}{\sqrt{10}} + \frac{3}{\sqrt{6}}\right) \cdot \frac{2\sqrt{8}}{\sqrt{10}+\sqrt{6}}$ și $\sqrt{32}$. Rezultatele obținute sunt înregistrate în tabelul următor.

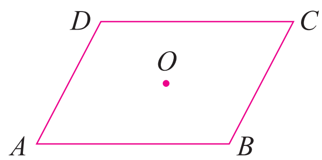
Ștefan	Sofia	Matei	Mara
2	4	5	6

Dintre cei patru elevi, cel care a calculat corect este:
a) Ștefan; b) Sofia; c) Matei; d) Mara.

(5p) **6.** Matei a cumpărat 3 kg de pere cu 5 lei kilogramul și 2 kg de portocale cu 6 lei kilogramul. Matei spune că a plătit pe toată marfa cumpărată 27 de lei. Afirmația lui Matei este:
a) adevărată; b) falsă.

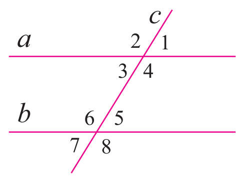
Subiectul al II-lea. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

(5p) **1.** În figura alăturată este reprezentat un paralelogram de centru O. Simetricul punctului A față de punctul O este punctul:
a) E; b) B;
c) C; d) D.



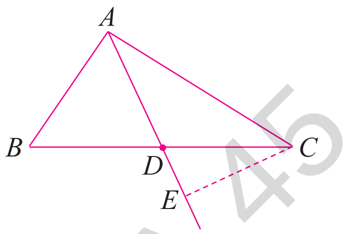
(5p) **2.** În figura alăturată, dreptele paralele a și b sunt tăiate de secanta c. Dacă $\sphericalangle 8 = 132°$, atunci $\sphericalangle 1$ are măsura egală cu:

a) $132°$; b) $58°$;
c) $48°$; d) $42°$.



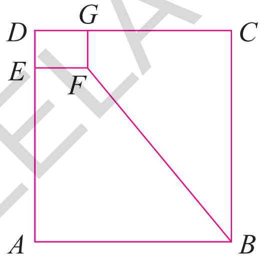
(5p) **3.** În figura alăturată este reprezentat un teren în formă de triunghi ABC dreptunghic în A, în care $AB = 60$ m, $AC = 80$ m și punctul D este mijlocul laturii BC. Ștefan se află în punctul C și vrea să ajungă la dreapta AD, parcurgând drumul cel mai scurt. Distanța parcursă de Ștefan este egală cu:

a) 36 m; b) 42 m;
c) 48 m; d) 50 m.



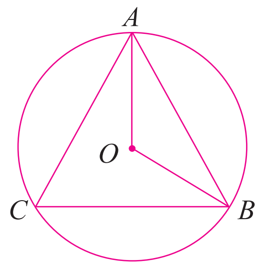
(5p) **4.** Figura alăturată reprezintă schița unui salon pentru evenimente, în formă de dreptunghi $ABCD$, cu $AB = 12$ m și $AD = 18$ m. Dreptunghiul $EFGD$, cu $ED = 2$ m și $EF = 4$ m reprezintă bucătăria salonului. Proprietarul acoperă suprafața $ABFE$ cu parchet. Aria suprafeței acoperite cu parchet este egală cu:

a) 84 m^2; b) 96 m^2;
c) 120 m^2; d) 128 m^2.



(5p) **5.** Pe cercul cu centrul în punctul O din figura alăturată sunt situate punctele A, B, C, astfel încât unghiul AOB are măsura egală cu $106°$ și măsura arcului $\overset{\frown}{AC}$ este egală cu $120°$. Măsura unghiului BAC este egală cu:

a) $63°$; b) $65°$;
c) $67°$; d) $68°$.



(5p) **6.** Cătălin are un acvariu în formă de paralelipiped dreptunghic, cu dimensiunile bazei egale cu 135 cm și 60 cm, iar înălțimea acvariului este egală cu 60 cm. Cătălin vrea să introducă pietre în formă de cuburi, având latura egală cu 15 cm. Numărul de cuburi ce poate fi introdus în acvariu, astfel încât să ocupe jumătate din volumul acestuia, este egal cu:

a) 54; b) 60; c) 68; d) 72.

Subiectul al III-lea. Scrieți rezolvările corecte. **(30 de puncte)**

1. Trei bluze și două rochii costă împreună 295 lei. Două bluze și cinci rochii costă împreună 490 lei.

(2p) a) Este posibil ca o bluză să coste 60 lei? Justificați răspunsul.

(3p) b) Determinați prețul unei rochii.

2. Se consideră expresia $E(x) = \left(\dfrac{2x^2 - 7x + 9}{x^2 - 7x + 10} - \dfrac{x+3}{x-5}\right) : \dfrac{1}{x^2 - 4}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2, 5\}$.

(2p) a) Arătați că $x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

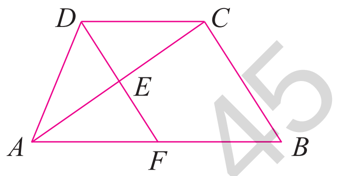
(3p) b) Demonstrați că $E(x) = (x-3)(x+2)$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2, 5\}$.

3. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 4$.

(2p) a) Reprezentați grafic funcția f într-un sistem de axe ortogonale xOy.

(3p) b) Știind că A și B sunt punctele de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axele Ox, respectiv Oy ale sistemului de axe ortogonale xOy, determinați coordonatele punctului $C(a, b)$ situat pe graficul funcției f, acesta fiind simetricul lui B față de punctul A.

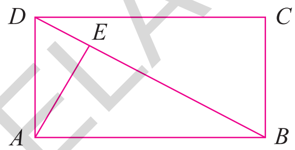
4. În figura alăturată este reprezentat trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $CD = 12$ cm, $BC = 16$ cm și $AD = 12$ cm. Paralela prin D la BC intersectează latura AB în F, astfel încât $AF = 20$ cm, iar diagonala AC în punctul E.



(2p) a) Arătați că $\measuredangle ADF = 90°$.

(3p) b) Determinați lungimea segmentului DE.

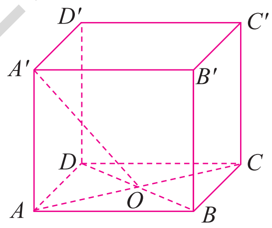
5. În figura alăturată este reprezentat un dreptunghi $ABCD$, iar AE este distanța de la punctul A la dreapta BD, astfel încât $BE = 25$ cm și $DE = 16$ cm.



(2p) a) Determinați lungimea segmentului AE.

(3p) b) Demonstrați că perimetrul dreptunghiului este mai mic decât 117 cm.

6. Cubul $ABCDA'B'C'D'$ reprezentat în figura alăturată are $AB = 12$ cm și $AC \cap BD = \{O\}$.



(2p) a) Calculați lungimea segmentului $A'O$.

(3p) b) Determinați măsura unghiului dreptelor $A'O$ și $B'C$.

TESTUL 2

Subiectul I. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

(5p) **1.** Dacă $8^x = 512$, numărul natural x este egal cu:

a) 2; b) 3; c) 4; d) 5.

(5p) **2.** În tabelul de mai jos sunt prezentate temperaturile medii zilnice înregistrate într-o localitate, în decursul unei săptămâni.

Ziua	Luni	Marți	Miercuri	Joi	Vineri	Sâmbătă	Duminică
Temperatura	–3°C	–2°C	–1°C	+5°C	+6°C	+7°C	+9°C

Temperatura medie înregistrată în această săptămână a fost egală cu:

a) –1°C; b) 2°C; c) 3°C; d) 4°C.

(5p) **3.** Într-o clasă sunt 12 băieți și 18 fete. Probabilitatea ca o fată să fie scoasă la tablă este egală cu:

a) 0,4; b) 0,5; c) 0,6; d) 0,8.

(5p) **4.** Dintre numerele 2,(34), 2,344, 2,34 și 2,3(4), cel mai mic este:

a) 2,(34); b) 2,344; c) 2,34; d) 2,3(4).

(5p) **5.** Patru elevi au calculat valoarea numărului real x, știind că $xy - xz - 3x = 3 - 2\sqrt{2}$ și $y - z = \sqrt{8}$. Rezultatele obținute de fiecare elev sunt înregistrate în tabelul următor.

Indicaţii şi răspunsuri

SOLUŢIILE TESTELOR DE AUTOEVALUARE POT FI CONSULTATE AICI:
(Scanați codul QR cu camera telefonului, nu din aplicația Mate2000+)

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I. CALCUL ALGEBRIC ÎN $\mathbb{R}$

1. Operaţii cu rapoarte algebrice de numere reale reprezentate prin litere

1.1. Adunarea şi scăderea

1. a) $\frac{x+2}{5}$; b) $x+1$; c) $1-x$; d) $\frac{5x+9}{3}$; e) $4(x+1)$; f) $\frac{56-83x}{30}$. **2.** a) 2, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$; b) 17, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; c) 3, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$; d) 1, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$. **3.** a) $\frac{2(x-1)}{3x^2}$, pentru $x \neq 0$; b) $\frac{2}{x}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$; c) $\frac{5}{x-1}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; d) 1, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$; e) $\frac{x-1}{x}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$; f) $\frac{x+1}{x-1}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$; g) 1, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$. **4.** a) 2, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; b) $\frac{8}{x+2}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$; c) $\frac{6}{(x+2)(x-2)}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$; d) $\frac{6}{x+2}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$; e) $\frac{2}{3x}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$; f) $-\frac{1}{3x}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$. **5.** a) $\frac{1}{x+2}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$; b) $\frac{4}{x-1}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; c) $\frac{x+8}{x-2}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$; d) $\frac{x+2}{x+1}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$. **6.** a) $\frac{9}{x-3}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$; b) $\frac{4}{x-4}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$; c) $\frac{4}{x-4}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{3, 4\}$; d) $-\frac{8}{x-4}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 4\}$. **7.** a) 1, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$; b) $-\frac{1}{x+1}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; c) 1, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$; d) $\frac{1}{x-5}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, 5\}$. **8.** a) $x \in \left\{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}$; b) $\frac{2}{2x-3}$; c) $n = 2$. **9.** a) $x \in \{-1, 1\}$; b) $F(x) = \frac{1}{x+1}$; $G(x) = 1 \in \mathbb{N}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; c) $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2020}\cdot\frac{1}{2021} = \frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2020}-\frac{1}{2021} = \frac{1}{3}-\frac{1}{2021} = \frac{1009}{3030}$. **10.** a) $x \in \{-3, 3\}$; b) $E(x) = -\frac{3}{x+3}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$; c) $n \in \{-6, -4, -2, 0\}$. **11.** a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$; b) $E(x) = \frac{6}{x-4}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$; c) $n \in \{-2, +1, +2, +3, +5, +6, +7, +10\}$.

f) $S = \left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}$; g) $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}$; $S = \left\{1, \frac{2}{13}\right\}$. **23.** $m \in \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)$. **24.** $\Delta = [(a + 1)^2 - 1]^2$, pentru oricare $a \in \mathbb{R}$. **25.** $S = \{1, m\}$.

Probleme de matematică aplicată în viaţa cotidiană

1. $l = 5$ m şi $L = 10$ m. **2.** $l = 4$ m. **3.** $x = 2$ m. **4.** $x = 1$ m.

CAPITOLUL II. FUNCŢII

1. Funcţii definite pe mulţimi finite

2. a) $f: A \to B$; $A = \{2, 4, 6, 9\}$; $B = \left\{\sqrt{2}, 2, \sqrt{6}, 3\right\}$; b)

x	2	4	6	9
$f(x)$	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{6}$	3

; c) $f(x) = \sqrt{x}$.

3. a) $A = \left\{-1, \frac{1}{5}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 2, 3^2\right\}$; $B = \left\{-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{9}, \sqrt{3}, 5\right\}$; b)

x	-1	2	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	3^2
$f(x)$	-1	$\frac{1}{2}$	5	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{9}$

; c) $f(x) = \frac{1}{x}$.

4. a)

x	0	2	4
$f(x)$	2	4	6

; b)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4	1	0	1	4

.

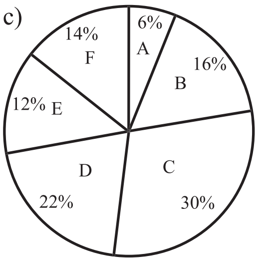
5. a) $x \to 2x$; c) f: $\{3, 4{,}5, 7, 10, 13, 35, 96\} \to \{6, 9, 14, 20, 26, 70, 192\}$, $f(x) = 2x$. **6.** a) $x \to \frac{360}{x}$; b) f: $\{6, 8, 4, 9, 12, 18\} \to \{10, 45, 90, 40, 30, 20\}$, $f(x) = \frac{360}{x}$. **7.** a) $x \to \frac{24}{x}$; b) f: $\{6, 4, 2, 8, 12, 24\} \to \{4, 6, 12, 3, 2, 1\}$, $f(x) = \frac{24}{x}$. **8.** a) Da; b) Nu; c) Da; d) Nu. **9.** a) Nu; b) Da; c) Nu. **10.** a) $G_f = \{(-1; 1), (0; 0), (1; 1), (2; 2)\}$; b) $A \in G_f$; $C \in G_f$; $E \in G_f$. **11.** $A \in G_f$; $C \in G_f$. **12.** a) $\operatorname{Im} f = \{1, 2, 5\}$; b) $\operatorname{Im} f = \{-1, 1, 3, 5, 7\}$; c) $\operatorname{Im} f = \{5, 4, 3, 2, 1\}$. **13.** a) $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; b) $B = \{7, 2, -1, 14\}$; c) $B = \left\{-\frac{3}{2}, -3, 3, \frac{3}{2}, 1, \frac{3}{4}\right\}$. **14.** a) $A = \left\{-2, -1, 1, 2, \frac{7}{2}\right\}$; b) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$; c) $A = \{-4, -3, -2, 0, 2, 3, 4\}$. **15.** b) $a \to 4a$; f: $\{8, 6, 12, 9, 13, 20, 36, 42\} \to \{32, 24, 36, 52, 80, 144, 168\}$, $f(x) = 4x$. **16.** a) $a = -1$; b) $a = -4$; c) $a = 2$. **18.** a)

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	3	2	1	0	1	2

; $\operatorname{Im} f = \{0, 1, 2, 3\}$; b) $G_f = \{(-3; 3), (-2; 2), (-1; 1), (0; 0), (1; 1), (2; 2)\}$. **19.** a) $G_f = \{(-2; 1), (0; 3), (1; 4), (2; 5)\}$; b) $G_f = \{(-3; 9), (-2; 4), (1; 1), (2; 4), (3; 9), (4; 16)\}$; c) $G_f = \{(-2; -3), (-1; -1), (0; 1), (1; 3), (2; 5)\}$. **20.** a) $G_f = \{(-1; -5), (0; -3), (1; -1), (2; 1), (3; 3)\}$; b) $G_f = \{(-4; -2), (-3; -1), (-2; 0), (-1; 2), (0; 0), (1; -2), (2; -4)\}$; c) $G_f = \{(-3; -8), (-2; -6), (-1; -4), (0; 1), (1; 2), (2; 4), (3; 7)\}$. **22.** a) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$; b) $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$; c) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$. **23.** $a = -3$; $b = -2$; $c = -2$; $d = 3$. **25.** $a = 3$; $b = -2$; $f(x) = 3x - 2$. **26.** Pentru $x = 0$ se obţine $f(0) + f(2) = 1$ şi pentru $x = 2$ se obţine $f(2) + f(0) = 3$. **27.** a) $f(2) = 2$, $f(4) = 3$, $f(8) = 4$, $f(24) = 8$, $f(36) = 9$; b) Numerele $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $f(n) = 2$ sunt numere prime, iar numerele pentru care $f(n) = 3$ sunt numere naturale care au un singur divizor propriu (pătrate perfecte de numere prime). **28.** a) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; $\operatorname{Im} f = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; c) 15. **29.** a) $\operatorname{Im} f = \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$; b) 90. **30.** a) $\operatorname{Im} f = \{1, 3, 7, 9\}$; b) 161.

19. a) $M_a = 175{,}5$ cm; b) $M_e = 172{,}5$; $D = 172{,}5$;

c)

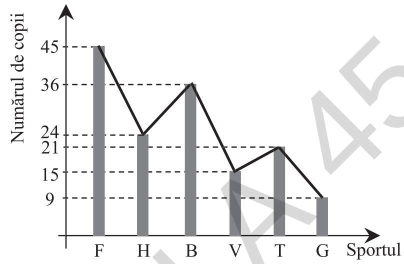


A: 1,60-1,65
B: 1,66-1,70
C: 1,71-1,75
D: 1,76-1,80
E: 1,81-1,85
F: 1,86-1,90

20. a)

Sportul	F	H	B	V	T	G
Numărul de copii	45	24	36	15	21	9

b), c)



21. b) $M_a = 8{,}42$; c) 68,46%; d) $M_e = 7{,}50$; $D = 8{,}50$. **22.** b) 29000 lei; d) $M_e = 31000$; $A = 28000$. **23.** a) $M_a = 300$ ℓ; b) $M_e = 300$; D este multiplă: 250, 300, 350; $A = 200$. **24.** a) $M_a = 304$ elevi; d) $M_e = 300$; $A = 50$. **25.** b) $M_e = 19$; $D = 15$; $A = 12$.

CAPITOLUL III. TEME PENTRU RECAPITULAREA FINALĂ ÎN VEDEREA EVALUĂRII NAŢIONALE

1. Numere naturale. Puteri cu exponent număr natural. Divizibilitate

1. Relația se scrie $2(6a - b) = 3c$, de unde $c \,\vdots\, 2 \Rightarrow c \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ și $3 \mid b$. Înlocuind se obține $\overline{abc} \in \{160, 132, 292, 264, 236, 396, 368\}$. **2.** Relația se scrie $3\overline{ab} = 4c \Rightarrow 3 \mid c$ și, cum c este cifră $\Rightarrow c \in \{3, 6, 9\}$; prin înlocuire rămâne $c = 9 \Rightarrow \overline{abc} = 129$. **3.** a – prim și a – par $\Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = 9$. **4.** $\overline{abc} = 394$. **5.** $89a - b = 10c \Rightarrow \overline{abc} = 198$. **6.** $5a = 2(b + c + 5) \Rightarrow a \in \{2, 4, 6, 8\}$; prin înlocuire și ținând cont că $a > b > c \Rightarrow \overline{abc} = 432$. **7.** $9(a - b) = a(b - 1) \Rightarrow \overline{ab} = 95$. **8.** $\overline{abc} \in \{441, 882\}$. **9.** $\overline{abc} \in \{695, 785, 875, 965\}$. **10.** $\overline{ab} = 75$. **11.** Cum $b = 2a \Rightarrow \overline{ab} \in \{12, 24, 36, 48\} \Rightarrow$ suma este 120. **12.** $\overline{ab} \in \{15, 24, 42, 51\}$. **13.** $A = 111(a + b + c)$; $37 \mid 111 \Rightarrow 37 \mid A$. **14.** $a = 3^{12n+2} \cdot 48$. **15.** $a = 3^{2n} \cdot 2^n \cdot 88$. **16.** $a = (12 \cdot 5^{3n+2})^2$. **17.** $A = 10^{3n} \cdot 11$. **18.** $A = 2^{3n} \cdot 5^{2n} \cdot 45$. **19.** $a = (11 \cdot 4^n)^2$. **20.** $a = 3(1 + 3 + 3^2) + 3^4(1 + 3 + 3^2) + ... + 3^{46}(1 + 3 + 3^2) = 13(3 + 3^4 + ... + 3^{46}) \Rightarrow 13 \mid a$. **21.** Cum $1 + 7 + 7^2 + 7^3 = 400$ și sunt $64 : 4 = 16$ grupe $\Rightarrow a \,\vdots\, 10$. **22.** $a = (1 + 2 + 2^2 + 2^3) + 2^4(1 + 2 + 2^2 + 2^3) + ... + 2^{2008}(1 + 2 + 2^2 + 2^3) = 15(1 + 2^4 + ... + 2^{2008}) \Rightarrow a \,\vdots\, 15$. **23.** Cum $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 31$ și sunt $2020 : 5 = 404$ grupe $\Rightarrow a \,\vdots\, 31$. **24.** Cum $1 + 3 + 3^2 + 3^3 = 40$ și sunt $2016 : 4 = 504$ grupe $\Rightarrow 10 \mid a$. **25.** a) $A = \{0, 1, 3, 9\}$; b) $A = \{0, 1, 2, 7\}$; c) $A = \{1, 2, 5, 14\}$; d) $A = \{6, 7, 9, 13, 21\}$. **26.** a) $x \in \{0, 4\}$; b) $x \in \{1, 7, 25\}$; c) $x \in \{1, 2, 4, 11\}$; d) $x \in \{0, 1, 6, 19\}$; e) $x \in \{0, 11\}$; f) $x = 9$. **27.** Fie $d \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $d \mid 3n + 11$ și $d \mid 4n + 15 \Rightarrow d \mid 3(4n + 15) - 4(3n + 11) \Rightarrow d \mid 1$ și cum $d \in \mathbb{N}^* \Rightarrow d = 1 \Rightarrow (3n + 11, 4n + 15) = 1$. **28.** $A = \{1, 2, 4, 8, 16\}$; $B = \{84, 168, 252\}$; $C = \{1, 2, 4, 8, 16, 84, 168, 252\}$. **29.** $A = \{0, 1, 2, 7\}$; $B = \{0, 2, 5, 8, 17\}$; $A \cap B = \{0, 2\}$; $\text{card}(A \cap B) = 2$. **30.** a) $A = \{0, 1, 3, 10\}$; b) $A = \{0, 2, 4, 10\}$; c) $A = \{1, 3, 13\}$; d) $A = \{-11, -4, -2, -1, 0, 1, 3, 10\}$. **31.** a) $(a; b) = 12 \Rightarrow a = 12x$ și $b = 12y$, cu $(x; y) = 1$; cum $a \cdot b = 2160 \Rightarrow x \cdot y = 15$ și cum $(x; y) = 1 \Rightarrow x \in \{1, 3, 5, 15\}$ și $y \in \{15, 5, 3, 1\} \Rightarrow (a, b) \in \{(12, 180), (36, 60), (60, 36), (180, 12)\}$; b) Folosind aceeași metodă ca și la subpunctul a), obținem $x \cdot y = 14$, de unde $x \in \{1, 2, 7, 14\}$ și $y \in \{14, 7, 2, 1\} \Rightarrow (a, b) \in \{(15, 210), (30, 105), (105, 30), (210, 15)\}$; c) $x + y = 8$ și $(x; y) = 1 \Rightarrow x \in \{1, 3, 5, 7\}$ și $y \in \{7, 5, 3, 1\} \Rightarrow (a, b) \in \{(15, 105), (45, 75), (75, 45), (105, 15)\}$; d) Se folosește relația $(a; b) \cdot [a; b] = a \cdot b \Rightarrow a \cdot b = 4860$ și, folosind aceeași metodă ca mai sus, $x \cdot y =$

GEOMETRIE

CAPITOLUL I. ARII ŞI VOLUME

1. Distanţe şi măsuri de unghiuri pe feţele sau în interiorul corpurilor geometrice studiate

1. a) $\sphericalangle(CC', AB) = \sphericalangle(AA', AB) = 90°$; b) $\sphericalangle(BC', AD) = \sphericalangle(BC', BC) = 60°$; c) $\sphericalangle(AC, (ADD')) = \sphericalangle(AC, AD) = 45°$. **2.** a) $AA' = 9$ cm; $\sphericalangle(BD', (ABC)) = \sphericalangle(BD', BD)$; $\sin(\sphericalangle DBD') = \frac{3}{5}$; b) $pr_{(ADD')} BD' = AD' \Rightarrow \sphericalangle(BD', (ADD')) = \sphericalangle AD'B$; $\sin(\sphericalangle AD'B) = \frac{2\sqrt{2}}{5}$. **3.** a) $\sphericalangle(AD', (ABC)) = \sphericalangle(AD', AD) = \sphericalangle D'AD = 30°$; b) $\sphericalangle(D'C, (ADD')) = \sphericalangle(D'C, DD') = 60°$; c) $\sphericalangle((ADD'), (BDD')) = \sphericalangle(AD, BD) = 45°$. **4.** a) $d(C, AC') = 12$ cm; b) $\sphericalangle(AC', (BCC')) = \sphericalangle(AC', BC') = \sphericalangle AC'B$; $\sin(\sphericalangle AC'B) = \frac{12}{25}$; c) $\sphericalangle((C'AB), (ABC)) = \sphericalangle(C'B, CB) = \sphericalangle CBC'$; $tg(\sphericalangle CBC') = \frac{20}{9}$. **5.** a) $d(C', BD) = C'O = 3\sqrt{6}$ cm, unde $AC \cap BD = \{O\}$; b) $\sphericalangle(BC', AB') = \sphericalangle(BC', DC') = 60°$; c) Dacă $CQ \perp C'O$, $Q \in C'O \Rightarrow d(C, (C'BD)) = CQ = 2\sqrt{3}$ cm. **6.** a) $\sphericalangle(AD', (BDD')) = \sphericalangle(AD', D'O) = \sphericalangle AD'O = 30°$; b) $\sphericalangle(BD', (ABC)) = \sphericalangle DBD'$; $\sin(\sphericalangle DBD') = \frac{\sqrt{3}}{3}$; c) Fie $AM \perp BD'$; $AM = 4\sqrt{6}$ cm. **7.** a) Dacă D este mijlocul laturii $BC \Rightarrow d(A', BC) = A'D = 12$ cm; b) $\sphericalangle((A'BC), (ABC)) = \sphericalangle A'DA = 30°$. **8.** a) $\sphericalangle(VA, (ABC)) = \sphericalangle(VA, AO) = \sphericalangle VAO$; $VA = 9\sqrt{2}$ cm; $\sin(\sphericalangle VAO) = \frac{\sqrt{3}}{3}$; b) $\sphericalangle(VB, (VAD)) = \sphericalangle(VB, VD) = 45°$; c) $\sphericalangle((VBC), (ABC)) = \sphericalangle VDO$; $tg(\sphericalangle VDO) = \sqrt{2}$.
9. a) $\sphericalangle(VA, (ABC)) = \sphericalangle VAO = 45°$; b) $\sphericalangle(VB, (VAC)) = \sphericalangle BVO = 45°$; c) $\sphericalangle(BC, (VAC)) = \sphericalangle BCO = 45°$.
10. $\sphericalangle((VBC), (ABC)) = \sphericalangle VMO = 45°$ (figura 1). a) $\sphericalangle((VAC), (VBD)) = \sphericalangle AOB = 90°$; b) Cum $BO \perp (VAC) \Rightarrow d(B, (VAC)) = BO = 10\sqrt{2}$ cm; c) $\Delta VQP \sim \Delta VOM \Rightarrow \frac{PQ}{OM} = \frac{VP}{VM}$. Notăm $PQ = PO = x \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{10 - x}{10\sqrt{2}} \Rightarrow x = 10(\sqrt{2} - 1) \Rightarrow PO = 10(\sqrt{2} - 1)$ cm.

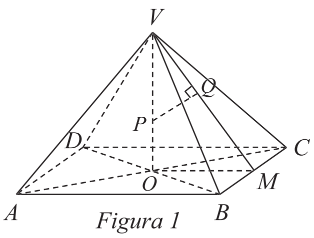


Figura 1

11. a) $DD' = 6\sqrt{2}$ cm; $d(D', AC) = D'O = 6\sqrt{3}$ cm, unde $AC \cap BD = \{O\}$; b) $d(D, (D'AC)) = DQ$, unde $DQ \perp D'O$, $DQ \subset (D'DO)$; $DQ = 2\sqrt{6}$ cm; c) $\sphericalangle((D'AC), (ABC)) = \sphericalangle D'OD$; $tg(\sphericalangle D'OD) = \sqrt{2}$. **12.** a) $DD' = 4$ cm, $AO \perp (BDD') \Rightarrow d(A, (BDD')) = 2\sqrt{6}$ cm; b) $pr_{(BDD')} AD' = D'O \Rightarrow \sphericalangle(AD', (BDD')) = \sphericalangle AD'O$; $tg(\sphericalangle AD'O) = \frac{\sqrt{15}}{5}$.
13. a) Dacă $DE \perp AC$, atunci $D'E \perp AC \Rightarrow d(D', AC) = D'E$; $DE = 3\sqrt{3}$ cm, $D'E = 9$ cm; b) $\sphericalangle((D'AC), (ABC)) = \sphericalangle DED'$; $tg(\sphericalangle DED') = \sqrt{2}$; c) Dacă $DQ \perp D'E$, $DQ \subset (D'DE) \Rightarrow d(D, (D'AC)) = DQ$; $DQ = 3\sqrt{2}$ cm. **14.** a) Dacă $DQ \perp D'A \Rightarrow DQ = d(D, (D'AB))$; $DQ = 4\sqrt{3}$ cm; b) $pr_{(D'AB)} DD' = D'Q \Rightarrow \sphericalangle(DD', (D'AB)) = \sphericalangle(DD', D'Q) = \sphericalangle DD'Q = 30°$ (figura 2). **15.** a) $DD' = 6\sqrt{3}$ cm; $BD' = 6\sqrt{15}$ cm.

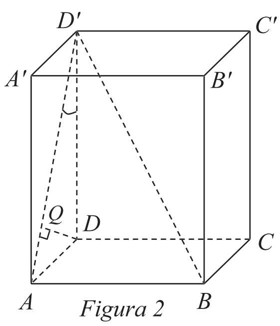


Figura 2

TESTE RECAPITULATIVE

TESTUL 1

Subiectul I. 1. B. **2.** D. **3.** D. **4.** D. **5.** B. **6.** B.

Subiectul al II-lea. 2. $\sqrt{\overline{ab}-\overline{ba}} \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{9(a-b)} \in \mathbb{N} \Rightarrow a-b \in \{1, 4\} \Rightarrow \overline{ab} \in \{21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98, 51, 62, 73, 84, 95\}$. Dar $\overline{ab} \,\vdots\, 3 \Rightarrow \overline{ab} \in \{21, 54, 87, 51, 84\}$. **3.** 16 fete; 20 de băieți. **4.** b) Raza cercului circumscris triunghiului AOB (unde A și B sunt punctele de intersecție a graficului funcției cu axele de coordonate) este egală cu $\frac{AB}{2} = \sqrt{5}$ (u).

Subiectul al III-lea. 1. a) $\mathscr{P}_{ABC} = AB + BC + AC = 18 + 18 + 18 = 54$ cm; b) $AD = AE = 36$ cm și $\sphericalangle A = 60° \Rightarrow \Delta ADE$ – echilateral și cum DC este mediană $\Rightarrow DC$ este și înălțime $\Rightarrow DC \perp AE$; c) Cum și EB este mediană în ΔADE echilateral $\Rightarrow BE \perp AD$, $BE \cap DC = \{O\} \Rightarrow O$ este ortocentrul $\Delta ADE \Rightarrow AO \perp DE \Rightarrow O$ este centru de greutate pentru $\Delta ADE \Rightarrow \mathscr{A}_{\Delta AOE} = \frac{1}{3}\mathscr{A}_{\Delta AED}$, iar $\mathscr{A}_{\Delta OCE} = \frac{1}{2}\mathscr{A}_{\Delta AOE} \Rightarrow \mathscr{A}_{\Delta OCE} = 54\sqrt{3}$ cm^2. **2.** a) $AA' = 12$ cm; $\mathscr{A}_t = 192$ cm^2; $\mathscr{V} = 144$ cm^3; b) $\sphericalangle(BD', (ADD')) = \sphericalangle(BD', AD')$; $\sin(\sphericalangle AD'B) = \frac{3}{13}$; c) $\sphericalangle((ADD'), (BDD')) = \sphericalangle ADB$; $\sin(\sphericalangle ADB) = \frac{3}{5}$.

TESTUL 2

Subiectul I. 1. B. **2.** A. **3.** C. **4.** D. **5.** A. **6.** B.

Subiectul al II-lea. 2. Cum $a + b = 26$ și $ab = 144 \Rightarrow a^2 + b^2 = 388 \Rightarrow (a-b)^2 = 100 \Rightarrow a - b = 10 \Rightarrow a = 18$ și $b = 8$. **3.** 600 km. **4.** b) Dacă $A(0; 2)$, $B(-1; 0)$ și $C(a; 0)$ sunt vârfurile ΔABC dreptunghic, $\sphericalangle CAB = 90° \Rightarrow BC^2 = AC^2 + AB^2 \Rightarrow (a+1)^2 = a^2 + 4 + 5 \Rightarrow a = 4$.

Subiectul al III-lea. 1. b) $\Delta ADM \equiv \Delta ABN$ (C.C.) $\Rightarrow \sphericalangle BAN \equiv \sphericalangle ADM$; cum $\sphericalangle ADM + \sphericalangle DMA = 90° \Rightarrow \sphericalangle BAN + \sphericalangle DMA = 90° \Rightarrow \sphericalangle AQM = 90°$; c) $DQ = \frac{18\sqrt{10}}{5}$ cm. **2.** a) $\mathscr{A}_{cub} = 216$ cm^2; $\mathscr{V} = 216$ cm^3; b) $DC \parallel AB \Rightarrow \sphericalangle(BD', DC) = \sphericalangle(BD', AB) = \sphericalangle ABD'$; $\text{tg}(\sphericalangle ABD') = \sqrt{2}$; c) $\sphericalangle(AD', (BDD')) = \sphericalangle AD'O = 30°$, unde $\{O\} = AC \cap BD$.

TESTUL 3

Subiectul I. 1. B. **2.** A. **3.** C. **4.** D. **5.** C. **6.** C.

Subiectul al II-lea. 2. $A = (2^n \cdot 3^n \cdot 5)^2$ pentru oricare $n \in \mathbb{N}$. **3.** 24 km. **4.** b) $M(-2, -4)$.

Subiectul al III-lea. 1. a) $l = 8$ cm; $L = 16$ cm; b) În ΔADC, E este centru de greutate $\Rightarrow \frac{OE}{ED} = \frac{1}{2}$; în ΔDBC, F este centru de greutate $\Rightarrow \frac{OF}{FC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{OE}{ED} = \frac{OF}{FC} \overset{\text{R.T.Th.}}{\Rightarrow} EF \parallel DC$; c) $\frac{\text{d}(E, AD) \cdot AD}{2} = \mathscr{A}_{\Delta ADE} = \frac{1}{3}\mathscr{A}_{\Delta ADC} \Rightarrow \text{d}(E, AD) = \frac{16}{3}$ cm. **2.** a) $\mathscr{V} = 1296$ cm^3; b) $\Delta A'MN$ – isoscel cu $A'M = A'N = 6\sqrt{7}$ cm. Dacă P este mijlocul lui MN, $A'P = 6\sqrt{6}$ cm, atunci $\mathscr{A}_{\Delta A'MN} = 36\sqrt{6}$ cm^2; c) ΔAMN – isoscel, cu $AM = AN = 6\sqrt{7}$ cm $\Rightarrow AP \perp MN \Rightarrow \sphericalangle((A'MN), (AMN)) = \sphericalangle APA' \overset{\text{R.T.P.}}{\Rightarrow} \Delta APA'$ – dreptunghic cu $\sphericalangle APA' = 90° \Rightarrow (A'MN) \perp (AMN)$.

TESTUL 4

Subiectul I. 1. A. **2.** B. **3.** C. **4.** D. **5.** A. **6.** C.

Subiectul al II-lea. 2. $a = 3 - 2\sqrt{2}$; $b = 3 + 2\sqrt{2}$; $m_g = 1$. **3.** 260 de pagini. **4.** $a = -1$, $f(x) = 2x - 1$. **5.** b) $n = 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{2016}$; cum $2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 = 2^2(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) = 2^2 \cdot 31$ și sunt 2015 termeni, rezultă că sunt 403 grupe de câte cinci termeni $\Rightarrow n = 2^2 \cdot 31 + 2^7 \cdot 31 + ... + 2^{2012} \cdot 31 \Rightarrow 31 \mid n$.

RECAPITULARE ŞI EVALUARE FINALĂ

EXERCIŢII ŞI PROBLEME RECAPITULATIVE PENTRU EVALUAREA FINALĂ

ALGEBRĂ

A. 1. a) $-\frac{1}{9}$; b) -3. **2.** $\sqrt{3}$. **3.** $x=\frac{2\sqrt{6}}{3}$; $y=\frac{3\sqrt{6}}{2}$; $m_g=\sqrt{6}$. **4.** a) $(x-2)^2(x+2)$; b) $(2x+1)(2x-1)(2x+3)$; c) $(x+1)(x-3)$; d) $(x+2)(7-x)$. **5.** a) $x=2$; $y=4$; b) $x=2\sqrt{3}$; $y=3\sqrt{2}$; c) $x=-3$; $y=2$; d) $x=1$; $y=-2$. **6.** $E(x)=(x^2+2x+4)^2+3>0$, $(\forall)\, x\in\mathbb{R}$. **7.** a) $S=\{2\}$; b) $S=\{-1, 2\}$; c) $S=\{-4, -2\}$; d) $S=\{-2\}$; e) $S=\{-6\}$; f) $S=\{-3, 4\}$; g) $S=\{-9\}$; h) $S=\left\{-9\sqrt{2}, 11\sqrt{2}\right\}$; i) $S=\left\{-\frac{5}{2}, 2\right\}$. **8.** a) $x\in(-7; +\infty)$; b) $x\in(-\infty; -4)$; c) $x\in[2; 4]$; d) $x\in[-7; 3]$; e) $x\in(-\infty; 6)$; f) Cum $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0 \Rightarrow 2(x+1)-3(x-2)\le 0 \Rightarrow x\ge 8 \Rightarrow x\in[8; +\infty)$; g) Cum $|x+2|\ge 0 \Rightarrow 4(x+2)-2(x+5)\ge 0 \Rightarrow x\in[1; +\infty)$; h) $x\in(-3; +\infty)$; i) $|x+2|>0$, pentru $(\forall)\, x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\} \Rightarrow x\in(-7; 1)\setminus\{-2\}$. **9.** $G_f\cap G_g=M(2; 1)$. **10.** b) $x=3$. **11.** a) $a=-8$; b) $x\in(-\infty; 3]$. **12.** a) $S=\{(3, -2)\}$; b) $S=\{(-2, 1)\}$; c) $S=\{(2, 3)\}$; d) $S=\{(-1, 2)\}$. **13.** a) $a=7$; b) $x_2=-3$. **14.** a) $S=\left\{-\frac{3}{2}, 5\right\}$; b) $S=\left\{1, \frac{5}{2}\right\}$; c) $S=\left\{-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right\}$; d) $S=\left\{-\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right\}$. **15.** a) $\frac{(x+1)(x-1)}{3(x-2)}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2, 1, 2\}$; b) $\frac{6(x+1)}{x+4}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-4, -1, 1, 4\}$; c) $\frac{x+2}{x-2}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2, 0, 2\}$; d) $-\frac{1}{x}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{\pm 1, 0\}$. **16.** $a=18$; $b=24$. **17.** 12 copii; 160 lei. **18.** 20 de fete; 12 băieţi. **19.** 13 bănci; 21 de elevi.

B. 1. $A=(-3; 1)$; $B=[-2; 1]$; $(A\cap B)\cap\mathbb{Z}^*=\{-2, -1\}$. **2.** $E(x)=4^2$, $(\forall)\, x\in\mathbb{R}$. **3.** $x=\frac{1}{7}$; $y=\frac{5}{7}$. **4.** $a=-2$; $b=1$; $c=1$. a) $a+b=-1\in\mathbb{Z}$; b) $a+b+c=-2+2=0$. **5.** $\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{6}=k$. a) $\frac{a}{c}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=\frac{p}{100} \Rightarrow p=50\%$; b) $k=3 \Rightarrow a=9$, $b=12$, $c=18$. **6.** a) $a\cdot b=5$; b) $(a-b)^2=2$; c) Dacă $(a-b)^2=2 \Rightarrow |a-b|=\sqrt{2} \Rightarrow a-b\in\left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$, dar $a<b \Rightarrow a-b=-\sqrt{2} \Rightarrow \frac{a-b}{\sqrt{2}}=-1\in\mathbb{Z}$. **7.** $a^2-b^2=1008$; $a=12x$, $b=12y$, $(x; y)=1 \Rightarrow (x-y)(x+y)=7 \Rightarrow x-y=1$ şi $x+y=7 \Rightarrow x=4$, $y=3$. **8.** $m=7x+4$ şi $n=8y+5 \Rightarrow n+3=[7; 8] \Rightarrow n=53$ (bomboane). **9.** a) $F(x)=\frac{5}{x+2}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{\pm 2\}$; b) $a\in\{-7, -3, -1, 3\}$. **10.** a) $F(x)=\frac{x+1}{x}=1+\frac{1}{x}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2, 0, 2\}$; b) $a\in\{\pm 1\}$. **11.** a) $S=\{(13, 4)\}$; b) $S=\{(7, 5)\}$; c) $S=\{(6, 9)\}$. **12.** a) $a=1$; b) $x=2$. **13.** b) $x=3$; c) $S=1125$. **14.** a) $a=2$; $b=6$; $f(x)=2x+6$; c) $S=4020$. **15.** a) $S=\{-6, -5\}$; b) $S=\{-2, 3\}$; c) $S=\left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$; d) $S=\{-1, 2\}$. **16.** a) $x\in\mathbb{R}\setminus\{-4, -1, 1\}$; b) $E(x)=-\frac{2}{x-1}$; c) $a\in\{0, 2, 3\}$. **17.** a) $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2, 2\}$; b) $E(x)=\frac{2}{x+2}$; c) $a\in\{-4, -3, -1, 0\}$. **18.** a) $x\in(-\infty; -3)$; b) $x\in(-\infty; 1)$; c) $x\in[2; +\infty)$; d) $x\in(-\infty; -6]$. **19.** 1296 lei. **20.** 21 creioane în prima cutie; 25 creioane în a doua cutie.

MODELE DE TESTE PENTRU EVALUAREA NAŢIONALĂ

TESTUL 1

Subiectul I. 1. b). **2.** d). **3.** c). **4.** a). **5.** b). **6.** a).

Subiectul al II-lea. 1. c). **2.** c). **3.** c). **4.** d). **5.** c). **6.** d).

Subiectul al III-lea. 1. a) Fie b prețul unei bluze și r prețul unei rochii. Avem $3b + 2r = 295$ și $2b + 5r = 490 \Rightarrow b = 45$ lei. Deci, o bluză nu poate costa 60 lei; b) $r = 80$ lei. **2.** a) $x^2 - 7x + 10 = x^2 - 2x - 5x + 10 = x(x - 2) - 5(x - 2) = (x - 2)(x - 5)$; b) $E(x) = \dfrac{2x^2-7x+9-(x+3)(x-2)}{(x-2)(x-5)} \cdot \dfrac{x^2-4}{1} = \dfrac{2x^2-7x+9-x^2-x+6}{\cancel{(x-2)}(x-5)} \cdot \dfrac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{1} = \dfrac{x^2-8x+15}{x-5} \cdot \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{(x-3)\cancel{(x-5)}}{\cancel{x-5}} \cdot \dfrac{x+2}{1} = (x - 3)(x + 2)$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2, 5\}$. **3.** a) $G_f \cap Ox = \{A(2, 0)\}$, $G_f \cap Oy = \{B(0, 4)\}$; se reprezintă grafic funcția; b) $C(a, b) \in G_f$ astfel încât $C = \text{sim}_A B \Rightarrow AB = AC \Rightarrow x_A = \dfrac{x_B + x_C}{2}$, $y_A = \dfrac{y_B + y_C}{2} \Rightarrow a = 4, b = -4$. **4.** a) $DF \parallel BC$, $F \in AB \Rightarrow BCDF$ – paralelogram $\Rightarrow BF = DC = 12$ cm și $DF = BC = 16$ cm. În ΔADF, $AD^2 + DF^2 = AF^2 \Rightarrow \sphericalangle ADF = 90°$ (reciproca teoremei lui Pitagora); b) $\Delta CED \sim \Delta AEF$ $(CD \parallel AF) \Rightarrow \dfrac{CE}{AE} = \dfrac{DE}{EF} = \dfrac{CD}{AF} = \dfrac{12}{20} = \dfrac{3}{5} \Rightarrow \dfrac{DE}{3} = \dfrac{EF}{5} = \dfrac{16}{8} = 2 \Rightarrow DE = 6$ cm. **5.** a) $AE \perp BD$; în ΔBAD: $\sphericalangle BAD = 90°$, $AE^2 = BE \cdot DE \Rightarrow AE = 20$ cm; b) $AB^2 = BE \cdot BD \Rightarrow AB = 5\sqrt{41}$ cm; $AD^2 = DE \cdot BD \Rightarrow AD = 4\sqrt{41}$ cm; $\mathscr{P} = 2(AB + AD) \Rightarrow \mathscr{P} = 18\sqrt{41}$ cm; $18\sqrt{41} < 117 \Leftrightarrow 2\sqrt{41} < 13 \Leftrightarrow 164 < 169$ (A). **6.** a) $AA' \perp (ABC) \Rightarrow AA' \perp AO$; $A'O^2 = A'A^2 + AO^2 \Rightarrow A'O = 6\sqrt{6}$ cm; b) $A'B' \parallel DC$, $A'B' = DC$ și $DC \perp (ADD') \Rightarrow A'B'CD$ – dreptunghi $\Rightarrow A'D \parallel B'C$; $\sphericalangle(A'O, B'C) = \sphericalangle(A'O, A'D) = \sphericalangle DA'O$; $\sphericalangle A'OD = 90°$; $\Delta A'BD$ – echilateral $\Rightarrow \sphericalangle DA'O = 30°$.

TESTUL 2

Subiectul I. 1. b). **2.** c). **3.** c). **4.** c). **5.** b). **6.** a).

Subiectul al II-lea. 1. c). **2.** c). **3.** c). **4.** c). **5.** d). **6.** c).

Subiectul al III-lea. 1. a) $a + b = 520$ și $120\%a = 75\%b \Leftrightarrow 8a = 5b \Leftrightarrow \dfrac{a}{5} = \dfrac{b}{8} = \dfrac{520}{13} = 40 \Rightarrow a = 200$, $b = 320$. Deci, prețul obiectului mai ieftin nu poate fi 240 lei; b) $p\%$ din $b = a \Rightarrow \dfrac{p}{100} = \dfrac{a}{b} \Rightarrow \dfrac{p}{100} = \dfrac{200}{320} \Rightarrow p = \dfrac{125}{2} = 62{,}5$. **2.** a) $E(x) = 4x^2 - 12x + 9 + 2x^2 + 5x - 3 - 9x^2 - 12x - 4 + 19x + 1 \Rightarrow E(x) = -3x^2 + 3 \Rightarrow E(x) = -3(x^2 - 1)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$; b) $-3(n^2 - 1) > -9 \Leftrightarrow n^2 - 1 < 3 \Leftrightarrow n^2 < 4 \Leftrightarrow |n| < 2 \Leftrightarrow n \in \{-1, 0, 1\}$. **3.** a) $A(3, -1) \in G_f \Rightarrow f(3) = -1 \Rightarrow 3a + 8 = -1 \Rightarrow a = -3$; b) $f(x) = -3x + 8$; $M(x, x) \in G_f \Rightarrow f(x) = x \Rightarrow -3x + 8 = x \Rightarrow x = 2 \Rightarrow M(2, 2)$. **4.** a) $MN = \dfrac{AB - CD}{2} \Rightarrow AB - CD = 7$. Fie $CT \perp AB$, $T \in AB \Rightarrow ADCT$ – dreptunghi $\Rightarrow AD = CT$ și $DC = AT \Rightarrow BT = AB - CD = 7$; $\sphericalangle BAC = 30° \Rightarrow \sphericalangle BCT = 30° \Rightarrow$ în ΔBCT: $\sphericalangle BTC = 90° \Rightarrow BC = 2BT \Rightarrow BC = 14$ cm;

Cuprins