Anton NEGRILĂ
Maria NEGRILĂ

matematică
algebră
geometrie

clasa a VII-a

partea a II-a

ediția a XIII-a, revizuită

mate 2000 – consolidare

MATE 2000+
Consolidare

Nume: ....
Prenume: ....
Clasă: ....
Școală: ....
....

EDITURA PARALELA 45
EDUCAȚIONAL

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.C. nr. 5318/21.11.2019.
Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programa școlară în vigoare pentru clasa a VII-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Referință științifică: Lucrarea a fost definitivată prin contribuția și recomandările Comisiei științifice și metodice a publicațiilor Societății de Științe Matematice din România. Aceasta și-a dat avizul favorabil în ceea ce privește alcătuirea și conținutul matematic.

Redactare: Andreea Roșca
Tehnoredactare: Adriana Vlădescu
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
NEGRILĂ, ANTON
Matematică : algebră, geometrie : clasa a VII-a /
Anton Negrilă, Maria Negrilă. – Ed. a 13-a, reviz. –
Pitești : Paralela 45, 2024 –
vol.
ISBN 978-973-47-4092-5
Partea 2. - 2024. - ISBN 978-973-47-4189-2

I. Negrilă, Maria

51

Algebră

Capitolul I
Ecuaţii şi sisteme de ecuaţii liniare

PP Competenţe specifice

- **C1.** Identificarea unei situaţii date rezolvabile prin ecuaţii sau sisteme de ecuaţii liniare
- **C2.** Utilizarea regulilor de calcul cu numere reale pentru verificarea soluţiilor unor ecuaţii sau sisteme de ecuaţii liniare
- **C3.** Utilizarea transformărilor echivalente în rezolvarea unor ecuaţii şi sisteme de ecuaţii liniare
- **C4.** Redactarea rezolvării ecuaţiilor şi sistemelor de ecuaţii liniare
- **C5.** Stabilirea unor metode de rezolvare a ecuaţiilor sau a sistemelor de ecuaţii liniare
- **C6.** Transpunerea matematică a unor situaţii date, utilizând ecuaţii şi/sau sisteme de ecuaţii liniare

PE-PP 1. Ecuaţii de gradul I cu o necunoscută

Ecuațiile sunt propoziții matematice cu una sau mai multe variabile, în care apare o singură dată semnul egal („=”).

Exemple:

1. $2x - 7 = x + 2$; **2.** $3y + 2y - 8 = 0$; **3.** $3(z + 2) = 3z + 6$.

Observaţii:

- $x, y, z, \ldots$ poartă denumirea de variabile (necunoscute).
- Ceea ce este scris în stânga semnului egal se numește membrul stâng al ecuației, iar ceea ce este scris în dreapta semnului egal poartă denumirea de membrul drept al ecuației.

DEFINIŢII: Un număr real se numește **soluție** pentru o ecuație dacă, înlocuind necunoscuta cu acel număr în ecuația dată, propoziția obținută este adevărată. Mulțimea soluțiilor unei ecuații se notează cu S.

O ecuație de forma $ax + b = 0$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ și $a \neq 0$, se numește **ecuație de gradul I cu o necunoscută**. Numerele reale a și b se numesc **coeficienți** (a este **coeficientul necunoscutei**, iar b se numește **termen liber**), iar x se numește **necunoscută** sau **variabilă**.

Se numește **soluție** a ecuației $ax + b = 0$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ și $a \neq 0$, un număr $x_0 \in \mathbb{R}$ pentru care propoziția $ax_0 + b = 0$ este adevărată.

A rezolva o ecuație înseamnă a determina toate soluțiile sale. Aceste soluții formează mulțimea soluțiilor ecuației date și se notează, de regulă, cu S.

Dacă după o ecuație urmează o precizare de forma $x \in M$, aceasta indică mulțimea în care ia valori necunoscuta. Se spune că ecuația dată este definită pe mulțimea M (sau că se rezolvă în mulțimea M). Dacă nu se face nicio precizare, se consideră $M = \mathbb{R}$.

Exemple:

- Numărul 9 este soluție a ecuației $2x - 7 = x + 2$ pentru că, înlocuind în ecuație pe x cu 9, se obține o propoziție adevărată: $2 \cdot 9 - 7 = 9 + 2$ (A) .
- Orice număr real este soluție pentru ecuația $3(z + 2) = 3z + 6$; din această cauză, ecuația se mai numește și **identitate**.
- Există ecuații care nu au nicio soluție reală.
  Exemple: $4(x - 3) = 4x + 10$; $2z + 5 = 2(z + 9)$ etc.
  Mulțimea soluțiilor acestor ecuații este $\varnothing$.

1.1. ECHIVALENŢA ECUAŢIILOR

Înlocuind necunoscuta x cu numărul 3 în ecuația $3x + 2 = 11$, constatăm că obținem o propoziție adevărată: $3 \cdot 3 + 2 = 11$. Deci, numărul 3 este soluție a ecuației. Putem spune că am rezolvat ecuația? Nu încă, deoarece nu suntem siguri că am aflat toate soluțiile. Să presupunem că numărul a este soluție (și el) a ecuației $3x + 2 = 11$. Atunci, înlocuind necunoscuta x cu numărul a, obținem propoziția adevărată (egalitatea) $3a + 2 = 11$. Vom scădea din ambii membri ai ei numărul 2, de unde rezultă că $3a + 2 - 2 = 11 - 2$, adică $3a = 9$. Vom împărți ambii membri cu 3 și obținem $a = 9 : 3$. Deci, $a = 3$.

Numai acum putem afirma că am rezolvat ecuația; ea are o singură soluție, și anume numărul 3. Și ecuația $x = 3$ are ca soluție doar numărul 3.

Deci, ecuațiile: $3x + 2 = 11$ și $x = 3$ au aceeași soluție, ele fiind **echivalente**.

Două ecuații sunt echivalente în cazul în care au aceleași soluții. O ecuație simplă de forma $x = a$, unde a este număr real dat, are ca soluție doar numărul a. Atunci când rezolvăm o ecuație oarecare, încercăm să găsim o alta, de forma $x = a$, care să fie echivalentă cu cea dată. Putem folosi următoarele reguli, care conduc la ecuații echivalente:

1) Se pot trece termenii dintr-un membru în celălalt, schimbându-le semnul.
2) Se pot înmulți (împărți) ambii membri ai ecuației cu numere diferite de zero.

1.2. ECUAŢII DE GRADUL I CU O NECUNOSCUTĂ. ECUAŢII REDUCTIBILE LA ECUAŢII DE GRADUL I CU O NECUNOSCUTĂ

În general, o ecuație de forma $ax + b = 0$, unde a și b sunt numere reale (iar $a \neq 0$), va fi numită *ecuație de gradul I cu o necunoscută*.

O asemenea ecuație se rezolvă în două etape:

1. Scădem din ambii membri pe b și obținem $ax = -b$.

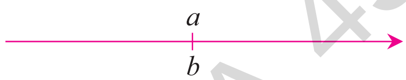
2. Împărțim ambii membri cu a și obținem $x = -\frac{b}{a}$. Această ultimă ecuație are evident ca unică soluție numărul real $-\frac{b}{a}$ și este echivalentă cu ecuația $ax + b = 0$.

Observații:

- Dacă $a = 0$ și $b = 0$, atunci propoziția cu o variabilă $ax = -b$ se scrie $0x = 0$, deci orice număr real este soluție a ecuației.
- Dacă $a = 0$, $b \neq 0$, atunci propoziția cu o variabilă $ax = -b$ devine $0x = -b$, ceea ce este imposibil, deoarece produsul niciunui număr real cu zero nu este un număr real diferit de zero. În general, ecuațiile nu se prezintă sub această formă simplă, însă le putem aduce la aceasta folosind regulile care conduc la ecuații echivalente.

1.3. Relația de egalitate în mulțimea numerelor reale. Proprietăți

Spunem că două numere reale a și b sunt egale dacă se reprezintă în același punct pe axa numerelor.



Exemple:

1. Dacă $a = 3$ și $b = \sqrt{9}$, atunci $a = b$, deoarece $\sqrt{9} = 3$.

2. Dacă $a = \left(2 - \sqrt{3}\right)^2$ și $b = 7 - 4\sqrt{3}$, atunci $a = b$, deoarece $\left(2 - \sqrt{3}\right)^2 = 7 - 4\sqrt{3}$.

Proprietățile relației de egalitate pe mulțimea numerelor reale:

1. Reflexivitatea: $x = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

2. Simetria: dacă $x = y$, atunci $y = x$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

3. Tranzitivitatea: dacă $x = y$ și $y = z$, atunci $x = z$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Egalitatea se păstrează dacă adunăm (scădem) din ambii membri ai unei egalități același termen sau dacă înmulțim (împărțim) o egalitate printr-un factor nenul. Adică au loc următoarele echivalențe, numite proprietăți de compatibilitate între relația de egalitate și operațiile cu numere reale:

$$a = b \Leftrightarrow a + x = b + x,\ (\forall)\ a, b, x \in \mathbb{R};$$

$$a = b \Leftrightarrow a - x = b - x,\ (\forall)\ a, b, x \in \mathbb{R};$$

$$a = b \Leftrightarrow a \cdot x = b \cdot x,\ (\forall)\ a, b, x \in \mathbb{R}\ (x \neq 0);$$

$$a = b \Leftrightarrow a : x = b : x,\ (\forall)\ a, b, x \in \mathbb{R}\ (x \neq 0).$$

Pe scurt, putem spune că:

- dacă două egalități se adună, se scad, se înmulțesc sau se împart membru cu membru, se obține tot o egalitate. Altfel spus, avem:

$$\text{dacă } \begin{cases} a = b \\ c = d \end{cases}, \text{ atunci } \begin{cases} a + c = b + d \\ a - c = b - d \end{cases} \text{ și } \begin{cases} a \cdot c = b \cdot d \\ \dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}\ (c \neq 0;\ d \neq 0) \end{cases}.$$

Exemplu: Demonstrați că dacă $x^2 + y^2 = 2xy$, atunci $x = y$.

Adunând în ambii membri ai egalității numărul real $-2xy$, obținem egalitatea $x^2 + y^2 - 2xy = 2xy - 2xy$, care este echivalentă cu egalitatea $(x - y)^2 = 0$. Deoarece pătratul unui număr real este zero doar când numărul dat este zero, rezultă $x - y = 0$. Adunând în ambii membri ai egalității numărul y, rezultă $x = y$.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Determinați valorile reale ale lui x pentru care egalitățile de mai jos sunt adevărate:

a) $2x + 3 = 7$; b) $4x - 7 = 9$; c) $2x - 1 = -9$; d) $6x - 5 = 7$;
e) $3x + 14 = 23$; f) $4x - 3 = -19$; g) $2x - 9 = -17$; h) $2x + 13 = 5$;
i) $2x + 5 = 13$; j) $3x + 7 = 16$; k) $2x - 1 = x + 3$; l) $3x - 2 = x + 6$;
m) $4x + 7 = 31$; n) $-2x + 5 = 11$; o) $5x + 6 = -14$; p) $-6x + 11 = -25$.

2. Stabiliți mulțimea soluțiilor pentru fiecare ecuație în parte:

a) $3x + 8 = 14$; b) $2x - 3 = x + 2$; c) $3x + 2 = x - 6$; d) $4x + 3 = x - 15$;
e) $3x - 8 = x + 4$; f) $3x - 11 = x - 23$; g) $4x + 5 = 2x + 13$; h) $5x - 9 = 3x + 1$;
i) $3x + 11 = -10$; j) $-7x + 19 = -16$; k) $5(x + 3) = -20$; l) $3x = x - 18$;
m) $-6x + 22 = -20$; n) $-11x - 91 = 30$; o) $4x + 15 = -5$; p) $8x = x + 49$.

3. Rezolvați ecuațiile:

a) $-9x + 17 = -10$; b) $3(x + 2) = 27$; c) $(x + 2) : 3 = -6$; d) $2(x + 1) - 3 = 5$;
e) $7 - 2(x + 3) = -11$; f) $15 + 3(x - 1) = -6$; g) $7(x - 2) - 13 = 8$; h) $6(x - 3) + 7 = -35$;
i) $4 - 3(x + 5) = -17$; j) $(3x + 1) : 5 = 5$; k) $3x - 8 = 13$; l) $-9 + 7x = 5x + 11$;
m) $6x - 13 = 2x - 1$; n) $2{,}5x - 3(1{,}5x + 2) = 4{,}8$; o) $5x - 9 + 2x = 19$;
p) $2x + \frac{1}{3} = -0{,}(6)$; r) $2x + \frac{1}{2} = -0{,}75 + \frac{1}{3}x$; s) $\frac{3(x-5)}{2} = 5x - 18$.

4. Arătați că următoarele ecuații sunt echivalente:

a) $2x + 1 = 7$ și $3x - 4 = 5$; b) $3(x - 2) = 12$ și $3(x + 5) = 33$;
c) $7(x + 1) = 6x$ și $3(x + 1) = -18$; d) $3x + 24 = -6$ și $-2(x - 1) = 22$;
e) $5(x + 4) = 25$ și $-6(2x - 5) = 18$; f) $4x - 13 = 11$ și $7(x + 3) = 63$.

5. a) Determinați valoarea numărului real m, știind că 3 este soluție a ecuației:
$$4(m + 1)x - 5mx + 7 = 2m - 6.$$
b) Determinați valoarea numărului real m, știind că -2 este soluție a ecuației:
$$3(m - 2)x - 2mx + 9 = 5m + 56.$$
c) Calculați valoarea numărului real m, pentru care 2 este soluție a ecuației:
$$7mx - 3(2m + 5)x - 11 = 4m - 17.$$
d) Aflați valoarea numărului real m, pentru care -3 este soluție a ecuației:
$$-9mx + 8(3m - 4)x + 18 - m = 36 + 6m.$$
e) Determinați valoarea numărului real m, pentru care -4 este soluție a ecuației:
$$3mx - 2(3m - 4)x + 13 + 7m = 14 + 8m.$$

6. a) Determinați valoarea reală a numărului a, știind că -3 este soluție a ecuației:
$$4x - a(x + 5) = 2ax + 16.$$
b) Determinați $a \in \mathbb{R}$, știind că 4 este soluție a ecuației: $a(7 - x) - 2x = 5ax + 26$.

c) Determinați numărul real a pentru care ecuația $2x + a = 4x + 3$ are soluția -2.

d) Determinați numărul real a pentru care ecuația $2ax + 5(x - 1) = 7x + 13 - 3a$ are soluția 1.

e) Determinați numărul real a pentru care ecuația $a(x + 2) + 3(x - 1) = ax - 3$ are soluția 2.

f) Determinați numărul real a pentru care ecuația $2x - a(x + 3) = 7ax + 27$ are soluția -5.

12. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuațiile:

a) $4(x + 3) - 3(2x + 3) = 7(x + 4) - 15(x + 1) + 8$;
b) $5(2x - 3) - 3(2x + 1) - 48 = 4(x + 3) - 4(4x + 7) + 30$;
c) $5(3x + 14) - 4(5x + 12) - 15 = 2(x + 38) - 4(2x + 13) - 11$;
d) $9(4x - 3) - 7(3x + 5) = 5(3x + 10) - 4(2x + 15) - 4$;
e) $2x(x + 1) - 3(x + 4) = 2x(x - 3) + 8$.

13. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $7(x + 2) - 2(x - 4) = 6(x + 2) - 9$;
b) $10(x - 1) - 3(4x - 7) - 2 = 4(3x - 5) + 1$;
c) $3(2x - 7) - 5(x - 2) - 3 = 2(x - 7) + 7$;
d) $4(x - 5) + 3(3x - 5) = 2(2x + 5) - 9$;
e) $5(2x + 1) - 8(1 - x) = 2(3x + 2) + 5$;
f) $3(5 + 4x) - 6(x + 2) = 5(2x - 1) - 4$;
g) $18(2 - x) + 6(7x - 12) = 5(2x - 1) - 3$;
h) $2(3x + 4) - 5(2x - 3) = 7(x - 3) + 11$;
i) $4(9x - 4) - 3(3x - 10) + 11 = 4(2x - 21) - 5$;
j) $2(5x - 4) + 6(4x - 3) + 11 = 6(3x - 4) - 7$.

14. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $3(4x - 7) - 4(5 - 3x) = 10x - 13$;
b) $5(2x - 1) - (15 + 19x) = 3x - 6(x + 2)$;
c) $3(2x - 7) - 5(x - 2) = 2x - 4$;
d) $5(2x + 1) - 2(3x + 2) + 3x = 13 - 5x$;
e) $5(2x - 1) - 3(1 - x) - 6(7x - 12) = 15(8 - x) - 84$;
f) $5(3 - 2x) - 3x - 2 - 6(2x - 3) = 2(3 - 4x) - 2(3x + 4)$;
g) $4(9x - 4) - 2(7 - 2x) - 7x = 5(x - 22) - 3(10 - 3x) - 4$;
h) $2(5x - 4) - (3x + 2) - 3(5x - 10) = 3x - 6(4x - 3) - 11$.

PE Aplicare și exersare **

15. Rezolvați ecuațiile următoare în mulțimea numerelor întregi:

a) $2[6(x + 3) - 3(x + 5)] - 4x = 6(x + 7)$;
b) $7x - 3[7(x + 3) - 5(x + 4)] = 5(x + 1)$;
c) $2[15 + 3(x - 1)] = 4(x + 7)$;
d) $3[4x - 3(x + 5)] = 2(2x - 23) - 19$;
e) $4[5(x - 2) - 3(x - 4)] + 5x - 11 = 6(x + 2) - 1$;
f) $2[18 - 4(3x - 9)] - 9 = 3[19 - 5(2x - 3)] - 21$;
g) $2[15 - 4(3x - 8)] - 7 = 3[18 - 5(2x - 3)] + 18$.

16. Rezolvați ecuațiile următoare în mulțimea numerelor reale:

a) $2[7(2x - 1) - 3(4x - 3)] - 12 = 5[1 - 2(2 - 3x)] - 19$;
b) $19 - 3[2(2 + 5x) - 11(2x + 1)] = 2[8 - 3(3 - 4x)] + 6$;
c) $3[3(2x - 5) - 2(4x - 1)] + 26 = 4[4(x + 3) - 3(x + 2)] + 13$;
d) $2[5(3x - 4) - 4(2x - 9) - 8] - 7 = 41 - 2[3(2x - 5) + 18]$;
e) $2\{7x - 3[3(x + 1) - 2(x + 4)] - 9\} = 5(x + 3)$;
f) $(x - 5)\{9x - 4[5(x - 2) - 3(x - 4)] + 3\} = x(x + 2) + 1$.

17. Rezolvați următoarele ecuații în mulțimea numerelor reale:

a) $\frac{x+3}{2}+\frac{x}{4}+\frac{2x+5}{6}=\frac{x+1}{4}-\frac{5}{12}$;
b) $\frac{2x-1}{20}+\frac{x+2}{15}-\frac{1}{4}=\frac{x+1}{12}+\frac{7}{12}$;
c) $\frac{2x+1}{3}+\frac{x}{6}-\frac{3}{4}=2\frac{11}{12}+\frac{x-4}{2}$;
d) $\frac{8x-7}{7}-\frac{2x+9}{6}=\frac{6x+11}{14}-\frac{5}{21}$;
e) $\frac{4x+5}{14}-\frac{4(3x-11)}{21}=\frac{2(3-x)}{6}+\frac{9}{14}$;
f) $\frac{7x+6}{30}-\frac{2x-9}{12}=\frac{2x+13}{30}-\frac{x+8}{20}+\frac{2}{3}$.

PE Aprofundare și performanță ***

27. Rezolvați în mulțimea $\mathbb{Q}$ ecuațiile:

a) $\frac{x}{10}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}-\frac{x+\frac{1}{2}}{5}\right)=\frac{1-x}{4}$;

b) $x-\frac{1}{15}\left(\frac{x}{2}-\frac{4-3x}{5}\right)=\frac{7x-\frac{x-3}{2}}{5}-\frac{11}{150}$;

c) $\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{x+2}{2}-\frac{2x-1\frac{1}{2}}{3}\right)=\frac{1}{4}$;

d) $1-\frac{1}{3}\left(x-\frac{x+1}{3}\right)=\frac{x}{2}-\frac{2x-\frac{10-7x}{3}}{2}+\frac{8}{9}$.

28. Rezolvați în mulțimea $\mathbb{Q}$ ecuațiile:

a) $x\cdot 3^{2020}=\left(3^{2020}-1\right):\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{3^{2019}}\right)$;

b) $x\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2020}\right)=\frac{1}{2020}$;

c) $x\left(-\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{4\cdot 5}-\ldots-\frac{1}{2019\cdot 2020}\right)=-\frac{2019}{2020}$.

29. Rezolvați în mulțimea $\mathbb{Q}$ ecuațiile:

a) $|x-3|=4$; b) $|x+2|=5$; c) $|2x-1|=5$; d) $\left|\frac{2x+1}{3}\right|=3$;

e) $|2x+5|+|4x+10|=21$; f) $|2x-3|+|6x-9|=36$.

30. Scrieți elementele mulțimii $A=\{x\in\mathbb{Q}\mid |x-3|+|2x-6|+|3x-9|+|4x-12|=50\}$.

31. Rezolvați în mulțimea $\mathbb{Q}$ ecuațiile:

a) $|x|=3$; b) $8-|x|=3$; c) $|-x|=1$; d) $-7+|-x|=-2$;
e) $|x-1|=11$; f) $5-|x-4|=2$; g) $|2-x|=5$; h) $9-|5-x|=-3$;
i) $|2x+3|=7$; j) $11-|2x+1|=-4$; k) $-16+|2x-1|=-5$;
l) $-17+|-2x-7|=-8$; m) $13-|-2x-5|=4$; n) $-14+|-x-4|=-6$.

32. Rezolvați în mulțimea numerelor raționale ecuațiile:

a) $||x+3|-7|=4$; b) $||x+2|-5|=8$; c) $||x+1|-4|=7$; d) $|9-|x+4||=12$;
e) $|10-|x-3||=6$; f) $|9-|x-4||=11$; g) $||x+4|-3|=5$; h) $||x+6|-8|=7$;
i) $||x+2|-4|=6$; j) $||x+7|-10|=14$; k) $||x+12|-9|=6$; l) $||x+8|-13|=10$.

33. Rezolvați în mulțimea numerelor raționale ecuațiile:

a) $|2x-7|=11$; b) $|2x+5|=13$; c) $|2x+3|=9$; d) $|2x-13|=17$;
e) $|2x-11|=19$; f) $|2x-9|=7$; g) $|2x+15|=13$; h) $|2x-15|=21$;
i) $|5-|2x-1||=8$; j) $|7-|2x-3||=6$; k) $|9-|2x+5||=8$;
l) $|13-|2x+3||=10$; m) $|15-|2x+7||=12$; n) $|19-|2x-9||=16$;
o) $||2x-11|-7|=10$; p) $||2x-3|-5|=8$; r) $||2x+5|-9|=14$;
s) $||2x+7|-13|=12$; ș) $||2x-9|-15|=18$; t) $||2x+13|-11|=6$.

34. Rezolvați în mulțimea numerelor raționale ecuațiile:

a) $2[3|2x-7|-8]-23=15$; b) $3[3|2x+13|-12]-26=19$;
c) $2[3|2x+11|-9]-7=5$; d) $3[2|2x+3|-9]-7=8$;
e) $2[3|2x-3|-8]-5=9$; f) $2[3|2x-5|-4]-3=7$;
g) $2[3|2x+5|-7]-1=3$; h) $3[2|2x-7|-9]-7=8$;
i) $2[3|2x-9|-10]-7=15$; j) $3[4|2x+1|-9]-16=17$.

35. Rezolvați în mulțimea numerelor raționale ecuațiile:

a) $2[3|2x+5|-4]-7=3$; b) $2[3|2x-3|-8]-9=5$;
c) $2[3|2x-5|-7]-3=1$; d) $3[2|2x-3|-9]-8=7$;
e) $3[2|2x+3|-19]+22=7$; f) $2[3|2x-11|-9]-5=7$;
g) $2[3|2x-9|-10]-15=7$; h) $3[3|2x-13|-12]-19=26$;
i) $3[4|2x-1|-9]-17=16$; j) $2[3|2x+7|-8]-23=15$.

36. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuațiile:

a) $3[2|2x+3|-19]+8=17$; b) $2[3|2x+1|-8]-5=9$;
c) $3[3x-7+4|2x-5|]-11=3(3x-4)+16$;
d) $3[2|2x-7|+4x-9]=4(x+9)+3+8x$.

37. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuațiile:

a) $3[2|2x+3|+4(x-8)+23]=4(x+9)+8x-21$;
b) $2[3|2x+5|+2(3x-5)+1]=5(2x+7)+2x+1$;
c) $3[4|2x+5|+2(3x-7)+5]=5(6x+7)-12x+22$;
d) $5(x+2)-3|2x+5|+2(x+3)=7(x+3)-14$.

38. Rezolvați în mulțimea numerelor raționale ecuațiile:

a) $2[3|2x-3|-8]-9=5$; b) $3[2|2x-3|-9]-8=7$;
c) $2[3|2x-5|-7]-23=17$; d) $2[3|2x+5|-4]-17=29$.

39. Rezolvați în mulțimea numerelor raționale ecuațiile:

a) $3[3|2x+3|+4(x+5)-11]=4(x+9)+36+8x$;
b) $3[3|2x+5|+2(x-7)+5]=5(x+2)+x+44$;
c) $3(4x-5)-3|2x+7|+32=6(2x+1)-16$.

PE-PP **Supermate ******

40. Rezolvați în mulțimea numerelor raționale ecuația:

$$\frac{2x+1}{2}+\frac{2x+2}{3}+\frac{2x+3}{4}+\frac{2x+4}{5}+\ldots+\frac{2x+(n-1)}{n}+\frac{2x+n}{n+1}=n,$$

unde $n \in \mathbb{N}^*$, n fixat.

41. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația:

$$1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\ldots+\frac{1}{1+2+3+\ldots+x}=\frac{400}{201}.$$

42. Determinați numerele reale x și y, cu $x \geq 1$ și $y \geq 2$, pentru care:

$$x+y-2\sqrt{x-1}-4\sqrt{y-2}+2=0.$$

43. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația:

$$\sqrt{1}+\sqrt{1+3}+\sqrt{1+3+5}+\sqrt{1+3+5+7}+\ldots+\sqrt{1+3+5+7+\ldots+(2x+3)}=720\cdot 2821.$$

44. Determinați numerele reale x, y, z pentru care următoarea egalitate este adevărată:

$$\sqrt{x+50}+\sqrt{y+100}+\sqrt{z+150}=\frac{x+y+z+312}{4}.$$

PE-PP Recapitulare şi sistematizare prin teste

TESTUL 1

• *Timp de lucru: 60 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.*

Subiectul I (*6 puncte*)

(1,5p) **1.** Rezolvați ecuațiile:

a) $-2x+3=-7$; b) $\frac{1}{2}x-1{,}7=2{,}3$; c) $\sqrt{2}x=3\sqrt{6}$.

(1p) **2.** Rezolvați ecuația:

$3(x-2)+2(1-x)=x+3(2x-5)-1$.

(1p) **3.** Arătați că numărul real $a=-2$ este soluție a ecuației:

$-5x+9=7x-4(x-6)+1$.

(1p) **4.** Rezolvați ecuația:

$2(3x-2)+3(x+3)+7=5(3x-5)-2(x-4)+9$.

(1,5p) **5.** Determinați valoarea numărului real m, pentru care ecuațiile de mai jos sunt echivalente.

$5(x-2)-3(x-1)=2(2-x)+5$ şi $3mx-2(m-2)x=2(4-m)-10$.

Subiectul al II-lea (*3 puncte*)

(1,5p) **1.** Rezolvați ecuația:

$|2x+1|=9$.

(1,5p) **2.** Rezolvați ecuația:

$$\frac{6x-5}{3}-\frac{10x-7}{8}=\frac{1}{12}-\frac{9-5x}{8}.$$

TESTUL 2

• *Timp de lucru: 60 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.*

Subiectul I (*6 puncte*)

(1,5p) **1.** Rezolvați ecuațiile:

a) $4x-9=-1$; b) $2{,}4-\frac{2}{5}x=1{,}6$; c) $\sqrt{3}+\sqrt{3}x=\sqrt{48}$.

(1p) **2.** Rezolvați ecuația:

$4(x-4)-3(2-x)=3x-2(x+5)+6$.

PE

Nume ____ Clasa _______

Test de autoevaluare

• *Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 100 de minute.*

I. Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Soluția reală a ecuației $-0{,}4x + 6 = -2{,}4x$ este ....

(0,5p) **2.** Rezolvând ecuația: $\frac{5}{8}\left[\frac{5}{8}+\frac{5}{8}\left(\frac{8}{5}x+\frac{3}{5}\right)\right]=25$, se obține soluția ....

(0,5p) **3.** Ecuația $||2x - 5| - 9| = 12$ are soluțiile ....

(0,5p) **4.** Soluția ecuației $4x - 5(2 - x) = 3(x - 6) - 16$ este ....

(0,5p) **5.** Soluția rațională a ecuației $\frac{8{,}4}{12-x}=\frac{1{,}4}{3}$ $(x \neq 12)$ este ....

(0,5p) **6.** Soluția ecuației $\frac{5x-6}{12}-\frac{3x+1}{18}=\frac{4x-3}{9}-\frac{2x+3}{6}-\frac{5}{36}$ este ....

II. Încercuiți răspunsul corect. (2 puncte)

(0,5p) **1.** Soluția ecuației $9x - 5(x + 4) = 7(x - 8) - 24 + x$ este:

A. 12; B. 15; C. 18; D. 20.

(0,5p) **2.** Soluția ecuației $\frac{3x+1}{4}-\frac{7-x}{2}-2=\frac{4x-3}{3}-\frac{9-5x}{6}$ este:

A. –6; B. –4; C. –3; D. –2.

(0,5p) **3.** Soluția reală a ecuației $0{,}5(2x + 7) - 0{,}3(3x - 8) = 0{,}9x - 0{,}2(3x - 5) + 1{,}3$ este:

A. 16; B. 18; C. 20; D. 24.

(0,5p) **4.** Soluția ecuației $x\left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{61\cdot 63}\right)=2-\frac{64}{63}$ este:

A. $\frac{1}{2}$; B. 1; C. $\frac{3}{2}$; D. 2.

III. Scrieți rezolvările complete. (4 puncte)

(1p) **1.** Rezolvați ecuația: $||x + 12| - 9| = 6$.

(1p) **2.** Rezolvați ecuația $3\{3(2x+3)-3[5(7-4x)+18(x-2)]-5\}=5[33-8(x+7)]-16$.

(1p) **3.** Determinați soluția reală a ecuației: $\frac{2x+9}{3}-\frac{5(2x+11)}{6}+4\frac{1}{2}=1\frac{1}{3}-\frac{3x+8}{2}$.

(1p) **4.** Determinați soluțiile reale ale ecuației: $2[3|2x+5|-12]-25=17$.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	I.5	I.6	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4
Punctajul														
Nota														

Capitolul II
Elemente de organizare a datelor

PP **Competențe specifice**

- C_1. Identificarea unor informaţii din tabele, grafice şi diagrame
- C_2. Prelucrarea unor date sub formă de tabele, grafice sau diagrame în vederea înregistrării, reprezentării şi prezentării acestora
- C_3. Alegerea metodei adecvate de reprezentare a problemelor în care intervin dependenţe funcţionale şi reprezentări ale acestora
- C_4. Descrierea în limbajul specific matematicii a unor elemente de organizare a datelor
- C_5. Analizarea unor situaţii practice prin elemente de organizare a datelor
- C_6. Transpunerea unei situaţii date într-o reprezentare adecvată (text, formulă, diagramă, grafic)

PE-PP 1. Produsul cartezian a două mulţimi nevide. Sistem de axe ortogonale în plan. Reprezentarea punctelor într-un sistem de axe ortogonale. Distanţa dintre două puncte din plan

Fie o mulțime nevidă formată din două elemente, notate a și b. Dacă stabilim o ordine de scriere a lor în mulțime, spunem că am format o **pereche ordonată**, pe care o notăm $(a; b)$.

Observaţii:

- Perechea ordonată $(a; b)$ este o mulțime distinctă de $\{a; b\}$.
- În timp ce $\{a; b\} = \{b; a\}$, în general $(a; b) \neq (b; a)$.

Exemple: $(2; 5) \neq (5; 2)$.

DEFINIŢIE: **Produsul cartezian** al mulțimilor nevide A și B este mulțimea formată din toate perechile ordonate $(a; b)$, unde $a \in A$ și $b \in B$.

$$A \times B = \{(a; b) \mid a \in A \text{ și } b \in B\}$$

Într-o pereche ordonată, ordinea scrierii elementelor contează, adică, în general avem $(a; b) \neq (b; a)$ și $A \times B \neq B \times A$. De fapt, perechile ordonate $(a; b)$ și $(c; d)$ sunt **egale** dacă și numai dacă $a = c$ și $b = d$.

Exemplu:

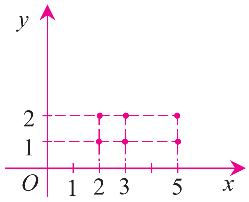
$A = \{2; 3; 5\}$ și $B = \{1; 2\}$

$A \times B = \{(2; 1), (2; 2), (3; 1), (3; 2), (5; 1), (5; 2)\}$

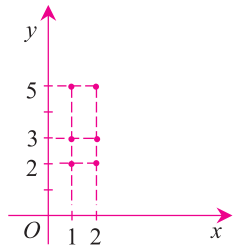
$B \times A = \{(1; 2), (1; 3), (1; 5), (2; 2), (2; 3), (2; 5)\}$

Se observă că $A \times B \neq B \times A$.

Reprezentarea geometrică a produsului cartezian $A \times B$ din exemplul anterior este:



Reprezentarea geometrică a produsului cartezian $B \times A$ din exemplul anterior este:



Se observă și din cele două reprezentări că $A \times B \neq B \times A$.

Regula produsului: Dacă mulțimile A și B sunt finite (au un număr finit de elemente), iar card $A = p$ și card $B = q$, atunci card$(A \times B) = p \cdot q$.

Exemplu: Dacă într-o clasă de 30 de elevi sunt 20 de băieți și 10 fete, atunci numărul perechilor distincte băiat-fată din clasă este 200.

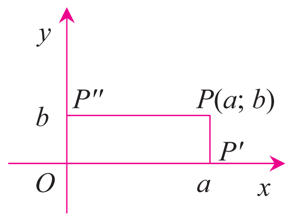
Într-adevăr, notând cu B mulțimea băieților și cu F mulțimea fetelor, orice pereche (băiat; fată) este element al produsului cartezian $B \times F$, iar card$(B \times F) =$ card $B \cdot$ card $F = 20 \cdot 10 = 200$.

Numerele reale se reprezintă pe o dreaptă numită axa numerelor. Elementele produsului cartezian $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pot fi reprezentate în plan într-un sistem ortogonal de axe.

Prin **sistem de axe ortogonale** înțelegem figura formată din două axe ale numerelor care sunt perpendiculare și care au un punct de intersecție, numit **origine**.

În figura alăturată, xOy este un sistem de axe ortogonale cu:

– **originea** O;
– **unitatea de măsură** AB;
– axa Ox se numește **axa absciselor**;
– axa Oy se numește **axa ordonatelor**.



Un astfel de sistem se mai numește și **sistem cartezian**.

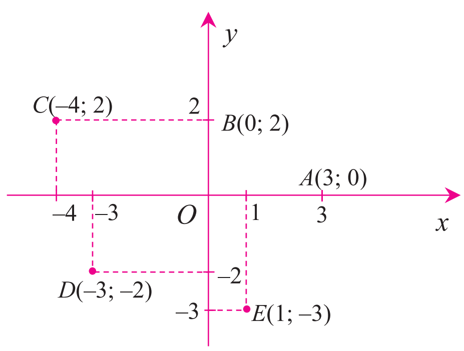
Planul în care se reprezintă un sistem cartezian este împărțit de acesta în patru **cadrane**.

Asociem fiecărei perechi $(a; b)$ de numere reale un punct în plan obținut astfel: pe axa Ox reprezentăm punctul P' de coordonată a, iar pe axa Oy punctul P'' de coordonată b. Prin punctul P' ducem o paralelă la axa ordonatelor, iar prin punctul P'' ducem o paralelă la axa absciselor. Intersecția celor două paralele este punctul P căutat, pe care îl notăm $P(a; b)$ și citim „punctul P de abscisă a și ordonată b".

Punctele de forma $A(0; y)$ se află pe axa Oy și se numesc puncte de abscisă 0 (zero).

Punctele de forma $B(x; 0)$ se află pe axa Ox și se numesc puncte de ordonată 0 (zero).

În figura alăturată sunt reprezentate în sistemul ortogonal de axe xOy punctele $A(3; 0)$, $B(0; 2)$, $C(-4; 2)$, $D(-3; -2)$; $E(1; -3)$.



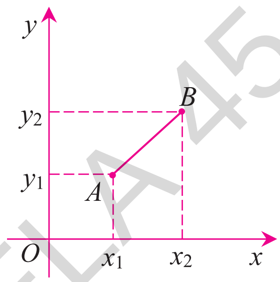
Două puncte $M(a; b)$ și $N(m; n)$ se află pe o dreaptă paralelă cu axa ordonatelor Oy dacă au aceeași abscisă, adică $a = m$. De exemplu, punctele $M(4; 5)$ și $N(4; -3)$ se află pe o dreaptă paralelă cu axa Oy, deoarece au abscisele egale.

Două puncte $P(c; d)$ și $Q(p; r)$ se află pe o dreaptă paralelă cu axa absciselor Ox dacă au aceeași ordonată, adică $d = r$. De exemplu, punctele $P(-3; 2)$, $Q(0; 2)$ și $R(7; 2)$ sunt situate pe o dreaptă paralelă cu axa absciselor dusă la 2 unități deasupra acesteia.

Distanța dintre două puncte din plan

Fie punctele $A(x_1; y_1)$ și $B(x_2; y_2)$ reprezentate în sistemul ortogonal de axe xOy. **Distanța dintre două puncte $A(x_1; y_1)$ și $B(x_2; y_2)$ se calculează după formula:**

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$



Aplicând teorema lui Pitagora într-un triunghi dreptunghic a cărui ipotenuză este segmentul AB, iar catetele sunt paralele cu axele de coordonate, obținem formula de mai sus.

Exemple:

1. Calculați distanța între punctele $A(-2; 4)$ și $B(1; -3)$.

Rezolvare: $AB = \sqrt{(-2-1)^2 + (4+3)^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$.

2. Știind că $A(a; 1)$ și $B(0; 5)$, determinați numerele reale a pentru care $AB = 5$.

Rezolvare: $AB = \sqrt{(a-0)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{a^2+16} \Leftrightarrow a^2 + 16 = 25 \Leftrightarrow a^2 = 9 \Leftrightarrow |a| = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow a \in \{-3; 3\}$.

3. Știind că $A(-a; 2)$ și $B(0; 7)$, determinați numerele reale a pentru care $AB = 13$.

Rezolvare: $AB = \sqrt{(-a-0)^2 + (2-7)^2} = \sqrt{a^2+25} \Leftrightarrow a^2 + 25 = 169 \Leftrightarrow a^2 = 144 \Leftrightarrow |a| = 12 \Rightarrow$
$\Rightarrow a \in \{-12; 12\}$.

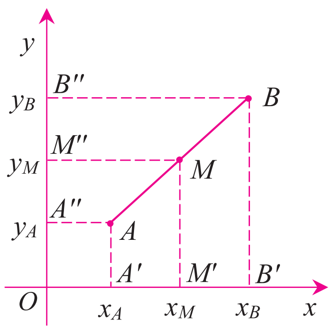
4. Știind că $M(a; 3)$ și $N(1; 2)$, determinați numărul natural a pentru care $MN = \sqrt{17}$.

Rezolvare: $MN = \sqrt{(a-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{(a-1)^2+1} \Leftrightarrow \sqrt{(a-1)^2+1} = \sqrt{17} \Leftrightarrow (a-1)^2 = 16 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |a-1| = 4 \Leftrightarrow a - 1 = 4$ sau $a - 1 = -4 \Leftrightarrow a = 5$ sau $a = -3$. Cum $a \in \mathbb{N} \Rightarrow a = 5$.

Mijlocul unui segment

Pentru oricare două puncte $A(x_A; y_A)$ și $B(x_B; y_B)$, coordonatele mijlocului M al segmentului AB sunt $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ și $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$.

Fie $M \in AB$ astfel încât $AM \equiv MB$ și A', M', B' – proiecțiile punctelor A, M și, respectiv, B pe axa Ox, A'', M'', B'' – proiecțiile punctelor A, M și, respectiv, B pe axa Oy. Cum $AM \equiv MB \Rightarrow A'M' \equiv M'B'$ și $A''M'' \equiv M''B''$. Deci, $A'M' = M'B'$ și $A''M'' = M''B''$, de unde se obține: $A'M' = x_M - x_A$ și $M'B' = x_B - x_M \Rightarrow x_M - x_A = x_B - x_M \Rightarrow 2x_M = x_B + x_A \Rightarrow$
$\Rightarrow x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$. Analog, $A''M'' = y_M - y_A$ și $M''B'' =$
$= y_B - y_M \Rightarrow y_M - y_A = y_B - y_M \Rightarrow 2y_M = y_B + y_A \Rightarrow$
$\Rightarrow y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$, unde $M(x_M; y_M)$.



Exemple:

1. Mijlocul segmentului AB, unde $A(3; 8)$ și $B(1; 2)$, este punctul $M(2; 5)$, deoarece $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$ și $y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{8+2}{2} = \frac{10}{2} = 5$.

2. Determinați coordonatele simetricului punctului $A(-1; 2)$ față de punctul $M(1; 4)$.

Simetricul lui A față de M este punctul $B'(a; b)$ cu proprietatea că M este mijlocul segmentului AB'. Atunci $x_M = \frac{x_A + x_{B'}}{2}$ și $y_M = \frac{y_A + y_{B'}}{2}$, de unde se obține $x_M = \frac{a-1}{2} = 1 \Rightarrow a = 3$ și $y_M = \frac{2+b}{2} = 4 \Rightarrow b = 6$. Deci, $B'(3; 6)$.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Se dau mulțimile $A = \{-3; -1; 1\}$ și $B = \{1; 2; 3\}$.
a) Determinați produsele carteziene $A \times B$ și $B \times A$.
b) Determinați produsele carteziene $A \times A$ și $B \times B$.
c) Reprezentați geometric cele patru produse carteziene.

2. Dacă $A = \{x \in \mathbb{Z}_+^* \mid 2x + 3 \leq 9\}$ și $B = \{x \in \mathbb{Z}_- \mid 3x + 7 \geq 1\}$, calculați $A \cap B$ și produsele carteziene $A \times B$ și $B \times A$.

3. Reprezentați geometric produsele $A \times B$ și $B \times A$, unde $A = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid |x| \leq 2\}$ și $B = \{-1; 0; 1\}$.

4. Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale punctele:
$A(2; 5)$, $B(3; 0)$, $C(-1; 3)$, $D(4; -4)$, $E(-3; -2)$, $F(-3; 0)$, $G(0; -1)$.

5. Fie punctele $A(1; 3)$, $B(-2; 2)$ și $C(4; 1)$.
a) Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale punctele A, B și C.
b) Fie A', B' și C' simetricele punctelor A, B și C față de axa Ox. Determinați coordonatele punctelor A', B' și C'.

6. Fie punctele $M(-3; 3)$, $N(2; 5)$, $P(4; -3)$, $Q(0; 2)$, $R(-2; 0)$.
a) Reprezentați punctele M, N, P, Q, R într-un sistem de axe ortogonale.
b) Calculați distanțele MN, PQ și PR.
c) Reprezentați punctele următoare și scrieți coordonatele lor:
i) punctul A este simetricul punctului P față de dreapta Ox;
ii) punctul B este simetricul punctului P față de dreapta Oy;
iii) punctul C este simetricul punctului P față de punctul O.

7. Fie punctele $A(0; 2)$, $B(2; 6)$ și $C(0; -3)$.
a) Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale punctele A, B și C.
b) Calculați lungimea segmentului AB.
c) Calculați aria triunghiului ABC.

8. Fie punctele $A(0; -1)$ și $B(3; -4)$.
a) Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale punctele A și B.
b) Dacă A' și B' sunt simetricele punctelor A și B față de Ox, aflați aria patrulaterului astfel format.

Geometrie

Capitolul I
Asemănarea triunghiurilor

PP Competențe specifice

- C1. Identificarea triunghiurilor asemenea în configuraţii geometrice date
- C2. Stabilirea relaţiei de asemănare între triunghiuri
- C3. Utilizarea asemănării triunghiurilor în configuraţii geometrice date pentru determinarea de lungimi, măsuri şi arii
- C4. Exprimarea în limbaj matematic a proprietăţilor unor figuri geometrice folosind asemănarea
- C5. Interpretarea asemănării triunghiurilor în configuraţii geometrice
- C6. Implementarea unei strategii pentru rezolvarea unor situaţii date, utilizând asemănarea triunghiurilor

PE-PP 1. Raportul a două segmente. Teorema lui Thales

1.1. Raportul a două segmente

Definiţie. Raportul a două segmente este raportul lungimilor lor, exprimate cu aceeași unitate de măsură.

Exemplu: $AB = 45$ cm, $CD = 2{,}7$ dm, $\frac{AB}{CD} = \frac{45\text{ cm}}{2{,}7\text{ dm}} = \frac{45}{27} = \frac{5}{3}$.

Observaţie: Raportul a două segmente nu depinde de unitatea de măsură aleasă.

Dacă a, b, c, a', b', c' sunt numere reale nenule și $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$, atunci a, b, c sunt proporționale cu a', b', c', iar k este coeficientul de proporționalitate.

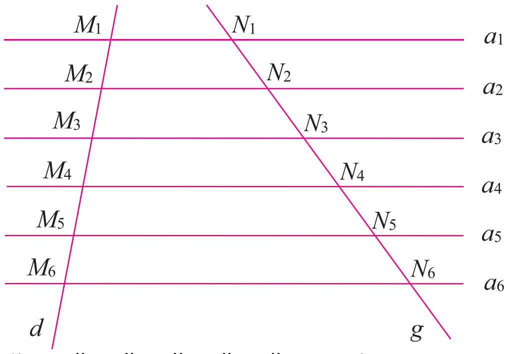
Definiţie. Segmentele AB, BC și CD sunt proporționale cu segmentele $A'B'$, $B'C'$ și, respectiv, $C'D'$ dacă lungimile lor, exprimate cu aceeași unitate de măsură, sunt proporționale.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}.$$

Observaţie: Se consideră segmentele: $AB = 20$ cm, $BC = 10$ cm, $CD = 1{,}25$ cm, $DE = 2{,}5$ cm. Atunci: $\frac{AB}{BC} = 2$; $\frac{DE}{CD} = 2$ și $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{CD}$, deci segmentele considerate sunt proporționale.

Teorema paralelelor echidistante

Dacă mai multe drepte paralele determină pe o secantă segmente congruente, atunci ele determină pe orice altă secantă segmente congruente.



În figura de mai sus, din $a_1 \parallel a_2 \parallel a_3 \parallel a_4 \parallel a_5 \parallel a_6$ ... și $M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_4 = M_4M_5 = M_5M_6$ ..., rezultă $N_1N_2 = N_2N_3 = N_3N_4 = N_4N_5 = N_5N_6$ ... .

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Desenați segmentele AB, CD, EF, știind că $AB = 6$ cm, $CD = 4$ cm, $EF = 10$ cm. Calculați valoarea rapoartelor:

a) $\frac{AB}{CD}$; b) $\frac{CD}{EF}$; c) $\frac{AB}{EF}$; d) $\frac{EF}{CD}$; e) $\frac{CD}{AB}$.

2. Două segmente MN și PQ sunt congruente. Cât este $\frac{MN}{PQ}$? Dar $\frac{PQ}{MN}$?

3. Fie A, B, C puncte coliniare, în această ordine, cu $AB = 12$ cm, $BC = 8$ cm. Calculați $\frac{AB}{BC} + \frac{AC}{AB}$.

4. În triunghiul ABC, segmentul EF este linie mijlocie, $E \in AB$ și $F \in AC$. Calculați valoarea rapoartelor:

a) $\frac{AE}{EB}$; b) $\frac{AF}{AC}$; c) $\frac{AB}{EB}$; d) $\frac{EF}{BC}$; e) $\frac{AC}{FC}$.

5. Fie punctele E și F situate pe segmentul AB astfel încât $\frac{AE}{EB} = \frac{2}{5}$ și $\frac{AF}{AB} = \frac{3}{7}$. Determinați valoarea rapoartelor:

a) $\frac{AE}{AB}$; b) $\frac{AF}{FB}$; c) $\frac{AE}{AF}$; d) $\frac{EF}{AE}$; e) $\frac{AF}{EB}$.

6. Dacă A, B, C sunt puncte coliniare, $AB = 32$ cm și $\frac{BC}{AB} = \frac{7}{8}$, aflați AC.

7. Se dă segmentul AB, cu $AB = 36$ cm. Construiți punctele E și F pe dreapta AB, astfel încât $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3} = \frac{AF}{FB}$.

8. Dacă $P \in MN$ și $\frac{PM}{PN} = \frac{4}{5}$, calculați:

a) $\frac{PN}{PM}$; b) $\frac{PN}{MN}$; c) $\frac{MN}{PN}$; d) $\frac{PM}{MN}$.

9. Se consideră segmentul AB cu $AB = 48$ cm și $M \in AB$, astfel încât $\frac{MA}{MB} = \frac{1}{2}$. Calculați MA și MB.

10. Laturile unui triunghi sunt proporționale cu numerele 8, 15, 12. Calculați perimetrul triunghiului, știind că cea mai mare latură este egală cu 45 cm.

PE Aplicare și exersare **

11. Calculați raportul segmentelor MN și PQ, știind că:

a) $MN = 60$ cm, $PQ = 90$ cm; b) $MN = 65$ cm, $PQ = 20$ cm;
c) $MN = 0,(3)$ hm, $PQ = 0,(3)$ km; d) $MN = 1,(3)$ dam, $PQ = 2,1(3)$ dam.

12. Fie AB un segment împărțit în 15 părți congruente. Notăm cu M, N și, respectiv, P al treilea, al șaptelea, respectiv al paisprezecelea punct de diviziune. Calculați valoarea rapoartelor:

a) $\frac{AN}{AB}$; b) $\frac{AM}{AB}$; c) $\frac{AP}{AB}$; d) $\frac{MN}{AB}$; e) $\frac{NP}{AB}$; f) $\frac{MN}{NP}$.

13. Stabiliți dacă segmentele AB, BC, CD, DE sunt proporționale, știind că:

a) $AB = 16$ cm, $BC = 6,4$ dm, $CD = 320$ mm, $DE = 8$ cm;

b) $AB = 2$ cm, $BC = 30$ cm și $\frac{CD}{DE} = 15$;

c) $AB = \frac{8}{3}$ dm, $BC = 0,(6)$ dm și $CD = 20\%\ DE$;

d) $AB = 56$ cm, $BC = 28$ cm, $CD = 3,5$ cm, $DE = 7$ cm.

14. Fie segmentul AB de lungime 135 cm și $P \in AB$. Calculați AP și PB, dacă:

a) $\frac{AP}{PB} = \frac{2}{7}$; b) $\frac{AP}{PB} = \frac{5}{4}$.

PE Aprofundare și performanță ***

15. În triunghiul ABC, cu $AB = 48$ cm, considerăm mediana CM, $CM = 64$ cm. Dacă D, E, $F \in BC$ astfel încât $BD = DE = EF = FC$ și D', E', $F' \in CM$ astfel încât $DD' \parallel EE' \parallel FF' \parallel AB$, calculați lungimile EE', FF', ME', $D'C$, MF', DD'.

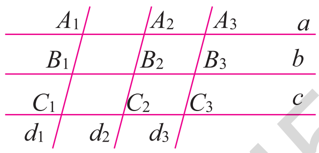
16. În triunghiul ABC, AD este mediană, $D \in BC$. Perpendiculara în A pe AD intersectează paralelele prin B și C la AD în punctele E și F. Demonstrați că $AE \equiv AF$.

17. În triunghiul oarecare ABC, BD și CE sunt mediane, $D \in AC$, $E \in AB$, iar $BD \cap CE = \{G\}$. Dacă F și H sunt mijloacele segmentelor BG și, respectiv, CG, arătați că $EFHD$ este paralelogram.

PE-PP **Supermate** ****

18. Pe dreapta d se consideră punctele O, A, B, C, D, E, F, în această ordine, astfel încât $OA = AB$, B este mijlocul lui AC, C este mijlocul lui AD, D este mijlocul lui BE și E este mijlocul lui CF. Arătați că $\frac{AC}{BE}+\frac{BC}{CD}+\frac{AB}{AD}\geq\frac{BF}{AF}$.

19. Fie (a, b, c) și (d_1, d_2, d_3) paralele echidistante. Demonstrați că A_1, B_2, C_3 sunt coliniare.



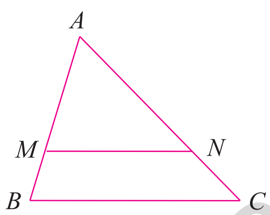
20. Fie segmentul AB și punctele $E, F \in AB$ astfel încât $\frac{AE}{EB}=\frac{4}{3}$ și $\frac{AF}{FB}=\frac{3}{4}$. Dacă M este mijlocul segmentului AB, aflați: $\frac{AM}{EM}$ și $\frac{AF}{FM}$.

PE-PP

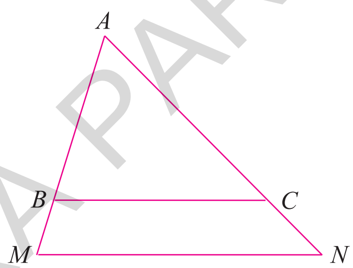
1.2. Teorema lui Thales

Teorema lui Thales

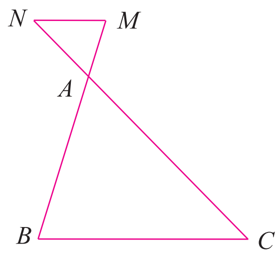
O paralelă dusă la una dintre laturile unui triunghi determină pe celelalte două laturi sau pe prelungirile acestora, segmente proporționale.



$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$$



$$\frac{AB}{AM}=\frac{AC}{AN}$$



$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$$

Reciproca teoremei lui Thales

a) Dacă o dreaptă determină pe două laturi ale unui triunghi sau pe prelungirile acestora segmente proporționale, atunci ea este paralelă cu a treia latură.

Dacă $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$, atunci $MN \parallel BC$.

b) **Negația teoremei**

Dacă o dreaptă nu determină pe două laturi ale unui triunghi sau pe prelungirile acestora segmente proporționale, atunci ea nu este paralelă cu a treia latură.

Dacă $\frac{AM}{AB}\neq\frac{AN}{AC}$, atunci $MN \nparallel BC$.

PE

Nume ____ **Clasa** _______

Test de autoevaluare

• *Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 100 de minute.*

I. Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Dacă $P \in AB$ astfel încât $\frac{AP}{AB} = \frac{2}{5}$ și $PB = 1$ cm, atunci lungimea segmentului AB este egală cu .... cm.

(0,5p) **2.** Fie $P \in AB$ astfel încât $\frac{PB}{AP} = \frac{3}{11}$. Dacă $AB = 35$ cm, lungimea segmentului AP este egală cu .... cm.

(0,5p) **3.** În interiorul unui segment AB se consideră punctele M și P, astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{4}{7}$ și $\frac{AP}{PB} = \frac{7}{4}$. Valoarea raportului $\frac{MP}{PB}$ este egală cu ....

(0,5p) **4.** Punctele M și N sunt situate pe segmentul AB astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{2}{5}$ și $\frac{AN}{AB} = \frac{3}{7}$. Valoarea raportului $\frac{AM}{AN}$ este egală cu ....

(0,5p) **5.** Fie punctele E și F pe segmentul AB astfel încât $\frac{AE}{EB} = \frac{5}{11}$ și $\frac{AF}{FB} = \frac{3}{5}$. Valoarea raportului $\frac{EF}{BE}$ este egală cu ....

(0,5p) **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 12$ cm și $AC = 18$ cm, iar M un punct pe latura AB astfel încât $AM = 8$ cm și paralela prin M la latura BC intersectează latura AC în punctul N. Lungimea segmentului CN este egală cu .... cm.

II. Încercuiți răspunsul corect. (2 puncte)

(0,5p) **1.** Într-un trapez lungimea bazei mari este de 24 cm. Dacă diferența dintre lungimea bazei mari și lungimea liniei mijlocii este de 5 cm, atunci lungimea bazei mici este:
A. 10 cm; B. 12 cm; C. 14 cm; D. 16 cm.

(0,5p) **2.** Un trapez $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, are $AB = 52$ cm și $CD = 36$ cm. Lungimea segmentului de pe linia mijlocie cuprins între diagonale este de:
A. 6 cm; B. 8 cm; C. 9 cm; D. 10 cm.

(0,5p) **3.** Într-un trapez $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AC \cap BD = \{O\}$ avem $AB = 24$ cm, $CD = 12$ cm și $BD = 27$ cm. Lungimea segmentului BO este egală cu:
A. 14 cm; B. 16 cm; C. 18 cm; D. 20 cm.

(0,5p) **4.** Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC, iar $BG \cap AC = \{D\}$. Dacă $CD = 9$ cm, atunci lungimea laturii AC este egală cu:
A. 12 cm; B. 14 cm; C. 16 cm; D. 18 cm.

III. Scrieți rezolvările complete. (4 puncte)

(1p) **1.** În trapezul $ABCD$, $AC \cap BD = \{O\}$, iar $BD = 56$ cm și $\frac{CO}{AO} = \frac{3}{5}$. Calculați lungimile segmentelor OD și OB.

(1p) **2.** În patrulaterul $ABCD$, paralela prin B la latura CD taie diagonala AC în M, iar paralela prin C la latura AB taie diagonala BD în N. Arătați că $MN \parallel AD$.

(1p) **3.** Din punctul M, mijlocul ipotenuzei BC a unui triunghi dreptunghic ABC, construim perpendicularele pe laturile AB și AC care se intersectează cu laturile respective în punctele D și, respectiv, E. Arătați că $\frac{ME}{MD} = \frac{AB}{AC}$.

(1p) **4.** În triunghiul ABC se ia punctul M pe latura AC. Fie $MP \parallel BC$, cu $P \in AB$ și $MN \parallel AB$, cu $N \in BC$. Arătați că $\frac{NB}{BC} + \frac{PB}{AB} = 1$.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	I.5	I.6	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4
Punctajul														
Nota														

Capitolul II
Relaţii metrice în triunghiul dreptunghic

PP Competenţe specifice

- **C_1.** Recunoaşterea elementelor unui triunghi dreptunghic într-o configuraţie geometrică dată
- **C_2.** Aplicarea relaţiilor metrice într-un triunghi dreptunghic pentru determinarea unor elemente ale acestuia
- **C_3.** Deducerea relaţiilor metrice într-un triunghi dreptunghic
- **C_4.** Exprimarea în limbaj matematic a relaţiilor dintre elementele unui triunghi dreptunghic
- **C_5.** Interpretarea unor relaţii metrice între elementele unui triunghi dreptunghic
- **C_6.** Implementarea unei strategii pentru rezolvarea unor situaţii date, utilizând relaţii metrice în triunghiul dreptunghic

PE-PP PROIECŢII ORTOGONALE PE O DREAPTĂ

DEFINIŢIE: Proiecția ortogonală a unui punct pe o dreaptă este piciorul perpendicularei duse din acel punct pe dreaptă.

TEOREMĂ: Proiecția ortogonală a unui segment AB pe o dreaptă d este segmentul $A'B'$, unde A' și B' sunt proiecțiile ortogonale ale punctelor A și B pe d (este un punct sau un segment, după cum AB este sau nu perpendicular pe d).

PROPRIETĂŢI:

1. Dacă $AB \parallel d$, atunci proiecția ortogonală a lui AB pe dreapta d este un segment congruent cu AB.

2. Dacă $C'D'$ este proiecția ortogonală a lui CD pe d și $CD \nparallel d$, atunci $C'D' < CD$.

3. Dacă $M'N'$ este proiecția ortogonală a lui MN pe dreapta d, atunci mijlocul lui $M'N'$ este proiecția ortogonală a mijlocului lui MN pe d.

PE-PP 1. Teorema înălţimii

Teorema înălţimii

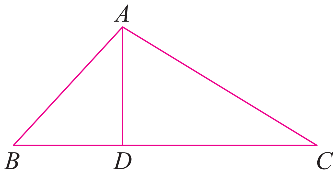
Într-un triunghi dreptunghic, lungimea înălțimii din vârful unghiului drept este media geometrică a lungimilor proiecțiilor ortogonale ale catetelor pe ipotenuză.

Observație:

Cu notațiile din figura alăturată, se poate spune:

Într-un triunghi dreptunghic, lungimea înălțimii duse din vârful unghiului drept este egală cu raportul dintre produsul lungimilor catetelor și lungimea ipotenuzei.

În triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 90°$, $AD \perp BC$, $D \in BC$, avem: $AD = \dfrac{AB \cdot AC}{BC}$.

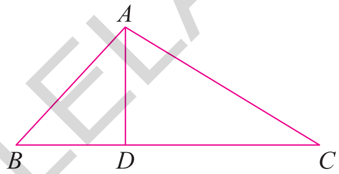


Reciproca teoremei înălțimii

Fie triunghiul ABC și $D \in BC$, astfel încât $AD \perp BC$ și $AD^2 = DC \cdot DB$. Atunci $\sphericalangle BAC = 90°$.

Demonstrație:

Din $AD^2 = DC \cdot DB$ rezultă că $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{DB}{AD}$, iar cum $\sphericalangle BDA \equiv \sphericalangle ADC$, rezultă că $\Delta ADC \sim \Delta BDA$, deci $\sphericalangle BAD \equiv$ $\equiv \sphericalangle DCA$. Dar $\sphericalangle BAD + \sphericalangle ABD = 90°$, atunci rezultă că $\sphericalangle DCA + \sphericalangle ABD = 90°$, adică $\sphericalangle BAC = 90°$.



● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. În triunghiul ABC, $\sphericalangle A = 90°$ și $AD \perp BC$, $D \in BC$. Precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $\text{pr}_{BC} A = D$; b) $\text{pr}_{BC} AB = BD$; c) $\text{pr}_{BC} AC = DC$; d) $\text{pr}_{AB} BC = AB$;
e) $\text{pr}_{BC} AD = BD$; f) $\text{pr}_{AC} AB = AC$; g) $\text{pr}_{AC} BC = AC$.

2. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$ și $AD \perp BC$, cu $D \in BC$, iar $BC =$ $= 75$ cm. Determinați lungimile proiecțiilor catetelor AB, respectiv AC pe ipotenuza BC, știind că proiecțiile sunt invers proporționale cu numerele 0,(6) și 0,375.

3. Se consideră triunghiul ABC și punctele D, E, F și, respectiv, G situate pe latura AC astfel încât să avem: $AD = DE = EF = FG = GC$. Dacă punctele M, N, P, Q și, respectiv, R sunt proiecțiile punctelor A, D, E, F și, respectiv, G pe latura BC, determinați valorile rapoartelor: $\dfrac{MN}{NP}; \dfrac{RC}{RQ}; \dfrac{MP}{CQ}; \dfrac{NP}{NC}; \dfrac{MC}{NR}; \dfrac{MQ}{NC}; \dfrac{PC}{MQ}$.

4. Într-un triunghi dreptunghic, lungimea ipotenuzei este egală cu 20,8 dm, iar lungimile proiecțiilor catetelor pe ipotenuză sunt direct proporționale cu numerele 0,1(6) și 0,375. Calculați lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei.

5. Într-un triunghi dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, $AD \perp BC$, $D \in BC$ se dau:

a) $AD = 24$ cm și $BD = 18$ cm. Calculați CD și BC.
b) $BD = 8$ cm și $CD = 0{,}18$ m. Calculați AD și BC.

6. Într-un triunghi dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, $AD \perp BC$, $D \in BC$ se dau:

a) $BD = 3{,}6$ dm și $CD = 6{,}4$ dm. Calculați BC și AD.
b) $CD = 7{,}2$ dm și $AD = 9{,}6$ dm. Calculați BD și BC.

PE Aplicare și exersare **

7. În dreptunghiul $ABCD$, $DE \perp AC$, $E \in AC$. Știind că $AE = 12$ cm și $CE = 48$ cm, calculați lungimea segmentului DE și aria dreptunghiului $ABCD$.

8. În rombul $ABCD$, $AC \perp BD$, $AC \cap BD = \{O\}$ și $OM \perp BC$, $M \in BC$. Dacă $BM = 18$ cm și $MC = 32$ cm, calculați lungimea segmentului OM și aria rombului $ABCD$.

9. Trapezul dreptunghic $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB > CD$, $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90°$, are diagonalele perpendiculare, iar $AB = 54$ cm și $CD = 24$ cm. Calculați:

a) lungimea segmentului AD; b) aria trapezului $ABCD$.

10. În trapezul isoscel $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AD < BC$, $AC \perp AB$, $AB \equiv DC$, cu $AM \perp BC$, $M \in BC$, avem $BM = 12$ cm și $CM = 48$ cm. Calculați:

a) lungimea segmentului AM; b) aria trapezului $ABCD$.

11. În triunghiul dreptunghic MNP, $\sphericalangle M = 90°$, $MQ \perp NP$, $Q \in NP$, se dau:

a) $PQ = 25{,}6$ dm și $PN = 40$ dm. Calculați NQ și MQ.

b) $NQ = 9$ dm și $NP = 25$ dm. Calculați QP și MQ.

PE Aprofundare și performanță ***

12. Într-un triunghi dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, $AD \perp BC$, $D \in BC$, se dau:

a) $\frac{BD}{CD} = \frac{4}{9}$, iar $BC = 52$ cm. Calculați AD și $\mathcal{A}_{ABC}$.

b) $\frac{CD}{BD} = 1\frac{7}{9}$, iar $AD = 24$ cm. Calculați BC și $\mathcal{A}_{ABC}$.

13. În triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, $AD \perp BC$, $D \in BC$, se știu $AD = 36$ dm și $CD = 48$ dm. Calculați:

a) lungimea proiecției BD și a ipotenuzei BC; b) aria triunghiului ABC.

14. Într-un triunghi dreptunghic cu ipotenuza de 45 dm raportul lungimilor proiecțiilor catetelor pe ipotenuză are valoarea 4. Calculați:

a) lungimile proiecțiilor catetelor pe ipotenuză;

b) lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei.

15. Fie triunghiul dreptunghic ABC, având ipotenuza $BC = 24$ cm. Dacă măsura unghiului dintre înălțimea și mediana duse din punctul A este de 30°, calculați lungimea înălțimii duse din A și aria triunghiului ABC.

16. Înălțimea rombului $ABCD$ are lungimea de 12 cm. Dacă $AC \cap BD = \{O\}$, iar proiecția segmentului OA pe AD are lungimea de 12 cm, calculați perimetrul și aria rombului.

PE-PP Supermate ****

17. În triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, $AD \perp BC$, $D \in BC$, $\mathcal{A}_{ABD} \cdot \mathcal{A}_{ADC} = 576$ cm^4 și $BC = 12\sqrt{3}$ cm. Calculați aria triunghiului ABC.

18. În triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, $AD \perp BC$, $D \in BC$, $\frac{BD}{CD} = \frac{4}{9}$, iar aria triunghiului este egală cu 351 cm^2. Aflați lungimea înălțimii duse din vârful A.

19. În triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, $AD \perp BC$, $D \in BC$, avem $\mathcal{A}_{ABD} \cdot \mathcal{A}_{ACD} = 1296$ cm^4 și $BC = 12\sqrt{2}$ cm. Calculați aria triunghiului ABC.

29. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, $AD \perp BC$, $D \in BC$, cu $AD = 24$ cm și $BD = DC - 14$. Calculați:

a) lungimile segmentelor BD și CD; b) lungimile catetelor AB, AC și a ipotenuzei BC;
c) perimetrul și aria triunghiului ABC.

PE-PP **Supermate ******

30. În patrulaterul $ABCD$, $\sphericalangle DAB = \sphericalangle BCD = 90°$, $AB = 12\sqrt{3}$ cm și $BC = 18\sqrt{2}$ cm. Știind că $AN \perp BD$ și $CM \perp BD$, iar $M, N \in BD$ și $MN = 6$ cm, calculați raportul dintre aria ΔABN și aria ΔDCM.

31. Un garaj are suprafața bazei pe care este construit sub forma unui pătrat cu latura de 5 m. Poate fi adăpostită în garaj o bucată de șină cu lungimea de 7 m?

PE-PP Recapitulare și sistematizare prin teste

TESTUL 1

• *Timp de lucru: 60 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.*

(3p) **1.** Într-un triunghi dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, $AD \perp BC$, $D \in BC$, se dau:
a) $AD = 12$ cm și $CD = 8$ cm. Calculați BD, BC, AB, AC și $\mathcal{A}_{ABC}$.
b) $BD = 10{,}8$ dm și $CD = 19{,}2$ dm. Calculați BC, AD, AB, AC și $\mathcal{A}_{ABC}$.
c) $BD = 5{,}4$ dm și $BC = 15$ dm. Calculați CD, AD, AB, AC și $\mathcal{A}_{ABC}$.

(3p) **2.** Într-un triunghi dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, $AD \perp BC$, $D \in BC$, se dau:
a) $CD = 22{,}5$ cm și $AD = 12$ cm. Calculați BD, BC, AB, AC și $\mathcal{A}_{ABC}$.
b) $BD = 1{,}8$ dm și $AD = 3$ dm. Calculați DC, BC, AB, AC și $\mathcal{A}_{ABC}$.
c) $BD = 27$ dm și $CD = 48$ dm. Calculați BC, AD, AB, AC și $\mathcal{A}_{ABC}$.

(3p) **3.** Într-un triunghi dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, $AD \perp BC$, $D \in BC$, se dau:
a) $AD = 9{,}6$ dm și $BD = 7{,}2$ dm. Calculați CD, BC, AB, AC și $\mathcal{A}_{ABC}$.
b) $BD = 2$ dm și $BC = 10$ dm. Calculați CD, AD, AB, AC și $\mathcal{A}_{ABC}$.
c) $CD = 96$ cm și $BC = 15$ dm. Calculați BD, AD, AB, AC și $\mathcal{A}_{ABC}$.

TESTUL 2

• *Timp de lucru: 60 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.*

(3p) **1.** Într-un triunghi dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, $AD \perp BC$, $D \in BC$, se dau:
a) $BC = 25$ cm și $CD = 16$ cm. Calculați BD, AB, AC și AD.
b) $AC = 24$ cm și $BC = 40$ cm. Calculați CD, BD, AB și AD.
c) $CD = 6{,}4$ cm și $BC = 10$ cm. Calculați BD, AB, AC și AD.

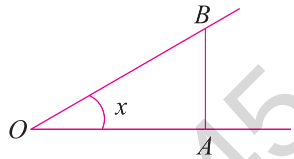
(3p) **2.** Într-un triunghi dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, $AD \perp BC$, $D \in BC$, se dau:
a) $BC = 15$ cm și $BD = 5{,}4$ cm. Calculați CD, AB, AC și AD.
b) $CD = 19{,}2$ cm și $AC = 24$ cm. Calculați BC, BD, AB și AD.

PE-PP

5. Noţiuni de trigonometrie

DEFINIŢII:

Într-un triunghi dreptunghic considerăm un unghi ascuțit și numim:



- **sinusul** lui = raportul dintre lungimea catetei opuse unghiului și lungimea ipotenuzei;
- **cosinusul** lui = raportul dintre lungimea catetei alăturate unghiului și lungimea ipotenuzei;
- **tangenta** lui = raportul dintre lungimea catetei opuse unghiului și lungimea catetei alăturate lui;
- **cotangenta** lui = raportul dintre lungimea catetei alăturate unghiului și lungimea catetei opuse lui.

Pentru figura de mai sus, acestea se scriu:

$\sin x = \frac{AB}{BO}$; $\cos x = \frac{AO}{BO}$; $\operatorname{tg} x = \frac{AB}{AO}$; $\operatorname{ctg} x = \frac{AO}{AB}$.

Sinusul, **cosinusul**, **tangenta** și **cotangenta** se numesc **funcții trigonometrice**, iar scrierea lor prescurtată este: **sin**, **cos**, **tg** și **ctg**.

Se observă că:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}; \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}; \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

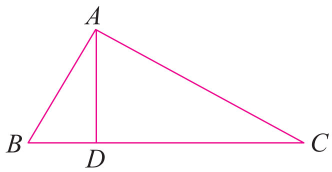
Relații între funcțiile trigonometrice ale unghiurilor complementare:

- $\sin(90° - x) = \cos x$;
- $\cos(90° - x) = \sin x$;
- $\operatorname{tg}(90° - x) = \operatorname{ctg} x$;
- $\operatorname{ctg}(90° - x) = \operatorname{tg} x$.

Valorile funcțiilor trigonometrice pentru unghiurile de 30°, 45°, 60°:

	sin	**cos**	**tg**	**ctg**
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Teorema cosinusului



Fie triunghiul ABC, cu $\sphericalangle C < 90°$ și $D = \text{pr}_{BC} A$.

Conform teoremei lui Pitagora generalizate, avem:

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 \cdot BC \cdot CD.$$

Din triunghiul dreptunghic ACD ($\sphericalangle D = 90°$) rezultă că $CD = AC \cos C$, deci avem relația:

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 \cdot BC \cdot AC \cdot \cos C. \quad (1)$$

În mod asemănător, dacă $\sphericalangle C > 90°$, se demonstrează că:

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2 \cdot BC \cdot AC \cdot \cos(180° - C). \quad (2)$$

Egalitățile (1) și (2) sunt cunoscute drept **teorema cosinusului**.

activități de învățare

PE Înțelegere *

1. În tabelul de mai jos sunt elementele unui triunghi ABC, $\sphericalangle A = 90°$. Completați tabelul, știind că dimensiunile segmentelor sunt măsurate în centimetri.

	AB	AC	BC	sin B	sin C	cos B	cos C	tg B	tg C	ctg B	ctg C
a)	12	16									
b)	18		30								
c)		21	35								
d)	24	32									
e)		27	45								
f)	30		50								

2. În tabelul de mai jos sunt elementele unui triunghi ABC, $\sphericalangle A = 90°$. Completați tabelul, știind că dimensiunile segmentelor sunt măsurate în centimetri.

	AB	AC	BC	sin B	sin C	cos B	cos C	tg B	tg C	ctg B	ctg C
a)	36	48									
b)	54		90								
c)		84	105								
d)		$12\sqrt{3}$	$6\sqrt{30}$								

3. Se consideră triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 90°$.

a) Dacă $AC = 24\sqrt{2}$ cm și $BC = 8\sqrt{30}$ cm, calculați: AB, sin B, cos B, sin C, cos C, tg B, tg C.

b) Dacă $AB = 6\sqrt{3}$ cm și $AC = 6\sqrt{6}$ cm, calculați: BC, sin B, cos B, tg C, ctg C.

c) Dacă $BC = 40$ cm și $\sin C = \frac{4}{5}$, calculați: AB, AC, sin B, cos B, cos C, tg C, ctg C.

d) Dacă $AB = 12$ cm și $\cos B = \frac{1}{2}$, calculați: BC, AC, sin C, cos C, sin B, tg B, tg C, ctg C.

e) Dacă $AC = 24$ cm și tg $C = 1{,}25$, calculați: AB, BC, sin B, cos B.

f) Dacă $AB = 18\sqrt{6}$ cm și $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$, calculați: AC, BC, cos C, tg C, ctg C.

4. În triunghiul ABC, $\sphericalangle B = 90°$, avem $BC = 12\sqrt{3}$ cm și $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Calculați cos C, AC, AB, tg C, ctg C.

52. Demonstrați egalitățile:

a) $4 \cdot \sin 75° = \sqrt{6} + \sqrt{2}$;
b) $4 \cdot \cos 75° = \sqrt{6} - \sqrt{2}$;
c) $\text{tg } 75° = 2 + \sqrt{3}$;
d) $\text{ctg } 75° = 2 - \sqrt{3}$.

PE-PP Supermate ****

53. În triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, $AD \perp BC$, $D \in BC$, $\text{tg}(\sphericalangle BAD) = \frac{3}{4}$ și $DC = 64$ cm. Determinați lungimile laturilor triunghiului și valorile funcțiilor trigonometrice ale unghiurilor B și C.

54. Fie triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, cu $AB = 21$ cm și $AC = 28$ cm. Dacă $AD \perp BC$, $D \in BC$, și semidreapta AE este bisectoarea unghiului BAC, $E \in BC$, calculați funcțiile trigonometrice ale unghiului DAE.

55. Se consideră trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, cu $AB = 21$ cm, $CD = 7$ cm, iar laturile neparalele $AD = 15$ cm și $BC = 13$ cm.

a) Calculați $\sin A$, $\cos A$ și $\sin B$, $\cos B$.

b) Calculați lungimile diagonalelor BD și AC.

c) Arătați că bisectoarea unghiului DAC este perpendiculară pe diagonala BD a trapezului.

56. În trapezul isoscel $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB < CD$, se știe că $AD \equiv AB \equiv BC$, iar $CD = 88$ cm și $\cos C = 0{,}6$. Calculați:

a) lungimile diagonalelor trapezului;

b) distanța de la punctul C la dreapta AD;

c) aria trapezului.

57. Fie $ABCD$ un pătrat cu latura de 24 cm. În interiorul pătratului se consideră punctul M astfel încât $AM = 16$ cm și $\sphericalangle DAM = 60°$.

a) Determinați lungimea segmentului DM.

b) Dacă perpendiculara în punctul M pe AM taie laturile AB și DC în N, respectiv punctul P, determinați lungimea segmentului PN.

PE-PP Recapitulare și sistematizare prin teste

TESTUL 1

• *Timp de lucru: 60 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.*

(3p) **1.** În triunghiul dreptunghic MNP, $\sphericalangle M = 90°$, $\sphericalangle N = 30°$, iar ipotenuza $NP = 12$ cm. Dacă $MQ \perp NP$, $Q \in NP$, calculați MQ și perimetrul triunghiului MNP.

(3p) **2.** În trapezul isoscel $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB = 28$ cm, $CD = 16$ cm și $\sphericalangle A = 45°$. Calculați:

a) înălțimea trapezului $ABCD$;

b) perimetrul trapezului $ABCD$.

(3p) **3.** În triunghiul isoscel ABC, $AB = AC$, $\sphericalangle B = 30°$ și $BC = 24$ cm. Calculați:

a) lungimea înălțimii duse din punctul B la latura AC;

b) perimetrul triunghiului ABC;

c) distanța de la ortocentrul triunghiului la latura BC.

Teste recapitulative

Notă: Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 100 de minute.

✹ TESTUL 1 ✹

Subiectul I. ***Pe foaia de teză se scriu doar răspunsurile.*** **(3 puncte)**

(0,5p) **1.** Soluția ecuației $-2x + 5 = 9$ este egală cu … .

(0,5p) **2.** Soluția reală a ecuației $|2x - 3| = 7$ este egală cu … .

(0,5p) **3.** Dacă $A(4; -5)$ și $B(-2; 3)$, atunci lungimea segmentului AB este egală cu … .

(0,5p) **4.** În triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, $AB = 12$ cm și $AC = 16$ cm. Lungimea medianei AM, cu $M \in BC$, este egală cu … cm.

(0,5p) **5.** În rombul $ABCD$, diagonalele au următoarele lungimi: $AC = 8$ cm și $BD = 6$ cm. Aria rombului este egală cu … cm^2.

(0,5p) **6.** În triunghiul ABC, $AB = 20$ cm, $AC = 28$ cm și $BC = 24$ cm. Punctele $M \in AB$ și $N \in AC$, astfel încât $\sphericalangle AMN \equiv \sphericalangle ACB$ și $MN = 12$ cm. Perimetrul triunghiului AMN este egal cu … cm.

Subiectul al II-lea. ***Pe foaia de teză se scriu rezolvările complete.*** **(6 puncte)**

(1p) **1.** a) Rezolvați ecuația $\frac{x+5}{3} - \frac{x+15}{6} = \frac{1}{3} - \frac{x+3}{4}$, $x \in \mathbb{R}$.

(1p) b) O persoană, după ce a cheltuit 20 de lei și 60% din rest i-a mai rămas $\frac{1}{3}$ din suma inițială. Determinați suma inițială.

(1p) **2.** Rezolvați sistemul: $\begin{cases} 3x - 2(y-1) = 1 \\ 2(x-y) - 3(x-2y) = 7 \end{cases}$.

(1,5p) **3.** În triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, $AB = 6$ cm și $\sphericalangle B = 60°$. Calculați:
a) lungimea ipotenuzei BC; b) aria triunghiului ABC.

(1,5p) **4.** În trapezul dreptunghic $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90°$, avem $AB = 12$ cm, $CD = 4$ cm și $BC = 10$ cm. Calculați:
a) perimetrul trapezului $ABCD$; b) aria trapezului $ABCD$.

✹ TESTUL 2 ✹

Subiectul I. ***Pe foaia de teză se scriu doar răspunsurile.*** **(3 puncte)**

(0,5p) **1.** Soluția ecuației $-3x + 8 = -4$ este egală cu … .

(0,5p) **2.** Soluția reală a ecuației $|2x - 5| = 9$ este egală cu … .

(0,5p) **3.** Dacă $A(3; -5)$ și $B(-1; -2)$, atunci lungimea segmentului AB este egală cu … .

(0,5p) **4.** Triunghiul dreptunghic cu ipotenuza egală cu 15 cm și o catetă egală cu 9 cm are perimetrul egal cu … cm.

(0,5p) **5.** Dreptunghiul $ABCD$ ($AB > AD$), cu $AC \cap BD = \{O\}$, are $AD = 6$ cm și $\sphericalangle BOC = 60°$. Lungimea diagonalei AC este egală cu … cm.

(0,5p) **6.** Trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $AB = 40$ cm, $CD = 16$ cm, $AD = 15$ cm și $BC = 18$ cm. Dacă $AD \cap BC = \{M\}$, atunci perimetrul triunghiului MDC este egal cu ... cm.

Modele de teste pentru Evaluarea Naţională

- *Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.*
- *Timpul efectiv de lucru este de 2 ore.*

TESTUL 1

Subiectul I. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Dacă $63 \cdot 84 = 2^x \cdot 3^y \cdot 7^z$, atunci $x - y + z$ este:
a) 0; b) 1; c) 2; d) 3.

(5p) **2.** În tabelul de mai jos sunt prezentate rezultatele obținute de elevii unei clase a VII-a la un test de evaluare.

Nota	3	4	5	6	7	8	9	10
Număr elevi	1	2	3	4	6	5	7	4

Numărul elevilor din clasă care au obținut note mai mari sau egale cu 8 este:
a) 11; b) 12; c) 15; d) 16.

(5p) **3.** Temperatura apei dintr-o piscină în timpul unei zile de vară este de 25°C. Pe timpul nopții, temperatura scade cu 4,5°C. Temperatura minimă a apei în cele 24 de ore ale acestei zile de vară este egală cu:
a) 20°C; b) 20,5°C; c) 21°C; d) 22°C.

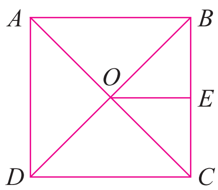
(5p) **4.** Inversul numărului $x = 0{,}08(3) + 0{,}75$ este egal cu:
a) $\frac{5}{4}$; b) $\frac{6}{5}$; c) $\frac{3}{2}$; d) $\frac{12}{5}$.

(5p) **5.** Numărul real $a = \sqrt{2^6 + 2^9}$ este egal cu:
a) $2^3 \cdot 3$; b) $2^6\sqrt{2}$; c) $\sqrt{2^{15}}$; d) 2^{14}.

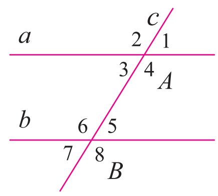
(5p) **6.** Matei pleacă cu trenul din Ploiești la ora 11:00 și ajunge în București la ora 12:10, în aceeași zi. Matei afirmă: „Deplasarea cu trenul de la Ploiești la București a durat 70 de minute.” Afirmația lui Matei este:
a) adevărată; b) falsă.

Subiectul al II-lea. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

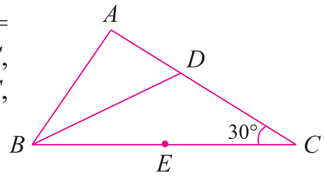
(5p) **1.** În figura alăturată este reprezentat un pătrat $ABCD$, cu $AC \cap BD = \{O\}$ și $OE \perp BC$, $E \in BC$. Simetricul punctului B față de punctul E este:
a) A; b) D;
c) C; d) E.



(5p) **2.** În figura alăturată, dreptele a și b sunt paralele și intersectate de dreapta c în punctele A și, respectiv, B. Dacă $\sphericalangle B_5 = 65°$, atunci măsura unghiului A_2 este egală cu:
a) 105°; b) 110°;
c) 115°; d) 120°.

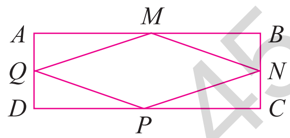


(5p) **3.** În figura alăturată este reprezentat un triunghi dreptunghic ABC, cu $\measuredangle A = 90°$ și $\measuredangle ACB = 30°$, iar $AB = 6$ cm. Dacă BD este bisectoarea unghiului ABC, $D \in AC$, iar punctul E este mijlocul ipotenuzei BC, atunci DE are lungimea de:



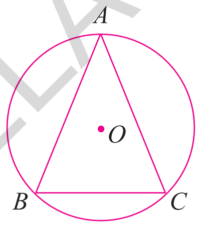
a) 3 cm; b) $2\sqrt{3}$ cm;
c) 6 cm; d) $4\sqrt{3}$ cm.

(5p) **4.** În figura alăturată este reprezentat dreptunghiul $ABCD$, având perimetrul egal cu 48 cm și lungimea egală cu triplul lățimii. Știind că mijloacele laturilor dreptunghiului sunt vârfurile rombului $MNPQ$, atunci aria rombului $MNPQ$ este egală cu:



a) 48 cm^2; b) 52 cm^2;
c) 54 cm^2; d) 56 cm^2.

(5p) **5.** În figura alăturată este reprezentat cercul de centru O și rază $R = 6$ cm, în care este înscris triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$), cu $\measuredangle BAC = 30°$. Lungimea laturii BC este egală cu:



a) 3 cm; b) $3\sqrt{2}$ cm;
c) $3\sqrt{3}$ cm; d) 6 cm.

(5p) **6.** În figura alăturată este reprezentată schița unui salon în formă de dreptunghi $ABCD$, cu $AB = 12$ m și $AD = 9$ m. Proprietarul salonului vrea să acopere podeaua salonului cu plăci de parchet în formă de pătrat $AMNP$, având latura $AP = 60$ cm. Numărul necesar de plăci este egal cu:

a) 270; b) 300; c) 320; d) 360.

Subiectul al III-lea. Scrieți rezolvările corecte. (30 de puncte)

1. Diferența a două numere naturale este egală cu 45. Două treimi din cel mai mare număr este cu 48 mai mare decât trei cincimi din cel mai mic număr.

(2p) a) Determinați cel mai mare număr.
(3p) b) Determinați cel mai mic număr.

2. Se consideră punctele $A(-5, 7)$, $M(-3, 4)$ și $B(2m - 9, -3p + 10)$, unde $m, p \in \mathbb{Z}$.

(2p) a) Aflați lungimea segmentului AM.
(3p) b) Determinați valorile întregi ale lui m și p, pentru care punctul B este simetricul punctului A față de punctul M.

3. Se consideră numerele reale:

$$a = \sqrt{(2 - 3\sqrt{3})^2} - |3 - 2\sqrt{3}| \text{ și } b = |\sqrt{2} - \sqrt{3}| + \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2}.$$

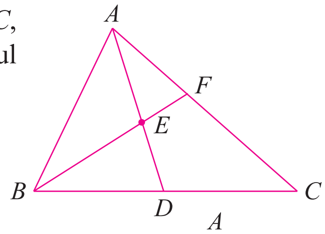
(2p) a) Determinați valorile numerelor reale a și b.
(3p) b) Calculați media geometrică a numerelor a și b.

(5p) **4.** Rezolvați sistemul $\begin{cases} \dfrac{2x+3y-7}{2} = \dfrac{4x+5y-8}{5} \\ \dfrac{3x-2y+6}{3} = \dfrac{5x-4y+10}{4} \end{cases}$.

5. În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC, în care AD este mediană, punctul E este mijlocul medianei AD, iar $BE \cap AC = \{F\}$.

(2p) a) Demonstrați că $BF = 4EF$.

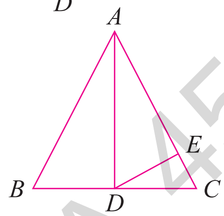
(3p) b) Arătați că $AC = 3AF$.



6. În figura alăturată este reprezentat un triunghi isoscel ABC, cu $AB = AC$, $AD \perp BC$, $D \in BC$ și $DE \perp AC$, $E \in AC$, iar $BC = 30$ cm și $DE = 12$ cm.

(2p) a) Determinați lungimea laturii AC.

(3p) b) Calculați sinusul unghiului BAC.



TESTUL 2

Subiectul I. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $-3\sqrt{3}+4\sqrt{6}:2\sqrt{2}$ este egal cu:

a) $-2\sqrt{3}$; b) $-\sqrt{3}$; c) $\sqrt{3}$; d) $2\sqrt{3}$.

(5p) **2.** În tabelul alăturat sunt prezentate date referitoare la numărul elevilor de la fiecare nivel gimnazial dintr-o școală. Clasele pentru care raportul dintre numărul băieților și numărul fetelor este supraunitar este:

a) a V-a și a VII-a; b) a VI-a și a VIII-a;
c) a V-a și a VI-a; d) a VII-a și a VIII-a.

Clasa	Numărul băieților	Numărul fetelor
a V-a	26	28
a VI-a	29	23
a VII-a	23	27
a VIII-a	28	24

(5p) **3.** Într-o săptămână de iarnă, în două zile consecutive, s-a măsurat temperatura la aceeași oră a dimineții. Vineri dimineața temperatura a fost de –17°C, iar sâmbătă dimineața, la aceeași oră, temperatura a fost de –5°C. Temperatura măsurată în cele două dimineți a fost mai mare în ziua de sâmbătă față de ziua de vineri cu:

a) –22°C; b) –17°C; c) –12°C; d) 12°C.

(5p) **4.** Dintre următoarele mulțimi de numere, cea care conține numai multipli de 5 este:

a) $\{2, 4, 8, 12\}$; b) $\{3, 6, 9, 18\}$; c) $\{5, 15, 25, 30\}$; d) $\{7, 21, 35, 49\}$.

(5p) **5.** Patru elevi au calculat media aritmetică a numerelor $-7\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 8\sqrt{2}, 13\sqrt{2}$ și au obținut rezultatele înregistrate în tabelul următor:

David	Cristina	Matei	Ana
$4\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$

Dintre cei patru elevi, cel care a calculat corect media aritmetică a celor patru numere este:

a) David; b) Cristina; c) Matei; d) Ana.

(5p) **6.** Un sportiv se deplasează pe un traseu în intervalul orar 9:30 – 10:50, apoi staționează. David afirmă că după 80 de minute de antrenament, de la plecare, sportivul staționează. Afirmația lui David este:

a) adevărată; b) falsă.

Recapitulare și evaluare finală

Exerciţii şi probleme recapitulative pentru evaluarea finală

ALGEBRĂ

A.

1. Calculați:

a) $\sqrt{20}:10^{-1}-\dfrac{50}{\sqrt{5}}+\sqrt{500}-4^{-1}\cdot\sqrt{2880}$; b) $5^{-1}\cdot\sqrt{2000}+2\sqrt{180}-\sqrt{80}:3^{-1}-\dfrac{60}{\sqrt{5}}$;

c) $6^{-1}:\dfrac{1}{\sqrt{432}}+\left(\dfrac{12}{\sqrt{18}}-\sqrt{8}\right)\cdot\sqrt{6}+2\sqrt{27}-\sqrt{48}$.

2. Calculați:

a) $\sqrt{18}\left(\sqrt{108}-2\sqrt{48}\right)-\sqrt{12}\left(\sqrt{288}-\sqrt{72}\right)$;

b) $\sqrt{12}\left(3\sqrt{50}-\sqrt{162}\right)-\sqrt{18}\left(\sqrt{432}-\sqrt{192}\right)$;

c) $2\left(\sqrt{360}+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{405}\right)+3\left(\sqrt{810}-\sqrt{20}\cdot\sqrt{162}\right)$.

3. Efectuați calculele:

a) $2\sqrt{72}\left(\sqrt{432}-\sqrt{75}-\sqrt{48}\right)$;

b) $3\sqrt{48}\left(\sqrt{288}-2\sqrt{50}-\sqrt{32}\right)$;

c) $\sqrt{108}\left(5\sqrt{8}-7\sqrt{32}+6\sqrt{18}-3\sqrt{50}\right)$;

d) $2\sqrt{242}\left(5\sqrt{27}-6\sqrt{48}-7\sqrt{12}+4\sqrt{75}\right)$.

4. Efectuați calculele:

a) $3\sqrt{3}+2\left(7\sqrt{3}-5\sqrt{3}\right)-\sqrt{108}$;

b) $2\sqrt{5}+3\left(8\sqrt{5}-6\sqrt{5}\right)-3\sqrt{80}$;

c) $3\left(3\sqrt{5}-4\sqrt{5}\right)-4\left(7\sqrt{5}-11\sqrt{5}\right)$;

d) $6\left(5\sqrt{2}-6\sqrt{2}\right)+2\left(13\sqrt{2}-9\sqrt{2}\right)$;

e) $3\left(\sqrt{12}-\sqrt{3}\right)+2\left(2\sqrt{48}-3\sqrt{12}\right)-4\sqrt{3}$;

27. Rezolvați sistemele:

a) $\begin{cases} 2(2x+3y)-3(x-y)=19 \\ 3(3x-4y)-2(x+2y)=-25 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 4(x+2y)-3(2x-y)=-38 \\ 3(x-y)-2(3x-2y)=5 \end{cases}$.

28. Rezolvați sistemele:

a) $\begin{cases} 2(x-2y-3)+3(-x+2y-4)=-12 \\ 3(x-y+2)-2(3x-2y+3)=-2 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 3(x-3y-4)+2(-2x+y+5)=-28 \\ 4(2x-3y-2)-3(3x-2y-5)=-15 \end{cases}$.

29. Rezolvați sistemele:

a) $\begin{cases} 2(3x-2y+3)-3(4x-3y-4=-14 \\ 3(2x+y+5)+4(-3x-2y-2)=15 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 3(3x-4y+1)+2(-2x+3y-4)=-7 \\ 2(2x+y-5)-3(x-2y+4)=-4 \end{cases}$.

30. Rezolvați sistemele:

a) $\begin{cases} \dfrac{2x+y-3}{4}-\dfrac{x-2y-8}{3}=5 \\ \dfrac{3x-4y+9}{3}-\dfrac{x-3y+5}{2}=2 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} \dfrac{x+2y-7}{2}-\dfrac{x-2y-2}{3}=-7 \\ \dfrac{2x-3y+6}{3}-\dfrac{3x-5y-3}{4}=2 \end{cases}$.

GEOMETRIE

A.

1. În triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, cu $AD \perp BC$, $D \in BC$ avem $AB = 15$ cm și $BD = 9$ cm. Calculați:

a) perimetrul și aria triunghiului ABC;

b) valoarea raportului $\dfrac{\mathcal{A}_{ADB}}{\mathcal{A}_{CDA}}$;

c) cât la sută reprezintă aria triunghiului ADB din aria triunghiului ACD.

2. În triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, cu $AD \perp BC$, $D \in BC$ avem $AC = 60$ cm și $AD = 36$ cm. Calculați:

a) perimetrul și aria triunghiului ABC;

b) cât la sută reprezintă aria triunghiului ACD din aria triunghiului ABC.

3. În triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, cu $AD \perp BC$, $D \in BC$ avem $BD = 36$ cm și $CD = 64$ cm. Calculați:

a) perimetrul și aria triunghiului ABC;

b) cât la sută reprezintă aria triunghiului ABD din aria triunghiului ABC.

4. În trapezul isoscel $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB < CD$, $\sphericalangle C = 60°$, $AB = 6\sqrt{2}$ cm și $BC = AD = 12\sqrt{2}$ cm. Calculați:

a) lungimea bazei CD a trapezului;

b) lungimile diagonalelor trapezului, AC și, respectiv, BD;

c) distanța de la punctul C la dreapta BD.

5. În trapezul $ABCD$, $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90°$, $AB \parallel CD$, $AB > CD$, iar bazele CD și AB sunt proporționale cu numerele 4 și, respectiv, 6. Știind că $AC \perp BC$, iar $AD = 12\sqrt{2}$ cm, calculați:

a) lungimile bazelor AB și CD;

b) aria trapezului $ABCD$;

c) lungimile diagonalelor trapezului, AC și BD.

6. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $AB < CD$, având diagonalele perpendiculare. Știind că $AB = 12$ cm, iar $CD = 28$ cm, calculați:

a) aria trapezului;

b) perimetrul trapezului;

c) lungimile diagonalelor trapezului, AC și BD.

7. Triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, are cateta $AB = 24\sqrt{3}$ cm, iar unghiul dintre înălțimea și mediana corespunzătoare ipotenuzei are măsura de $30°$. Știind că $AB < AC$, $AD \perp BC$, $D \in BC$ și $M \in BC$ astfel încât $BM \equiv CM$, calculați:

a) perimetrul triunghiului;

b) aria triunghiului.

8. În dreptunghiul $ABCD$, $AD < AB$, $AM \perp BD$, $M \in BD$ și $AM \cap CD = \{N\}$. Dacă $AD = 12$ cm și $BM = 18$ cm, calculați:

a) lungimea diagonalei BD;

b) lungimea segmentului MN;

c) aria patrulaterului $BCNM$.

9. În trapezul dreptunghic $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$ și $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90°$, se dau $AD = 20\sqrt{3}$ cm, $AB = 60$ cm, iar diagonala BD este bisectoarea unghiului B. Calculați:

a) lungimile diagonalelor AC și BD;

b) perimetrul trapezului;

c) aria trapezului și aria triunghiului BCD.

10. Trapezul dreptunghic $ABCD$, cu $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90°$, $AB \parallel CD$, are $CD = 12$ cm și $AB = 48$ cm. Știind că trapezul are diagonalele perpendiculare, calculați:

a) aria trapezului $ABCD$;

b) distanța de la punctul A la dreapta BC;

c) distanțele de la punctul M la bazele CD și, respectiv, AB, unde $\{M\} = AD \cap BC$.

11. Dreptunghiul $ABCD$ are $AB = 6\sqrt{3}$ cm și $BC = 18$ cm. Știind că $DP \perp AC$, $P \in AC$, și $DP \cap BC = \{M\}$, calculați:

a) lungimea diagonalei AC a dreptunghiului $ABCD$;

b) lungimea segmentului MC;

c) cât la sută reprezintă aria triunghiului DPC din aria triunghiului CBA.

Indicaţii şi răspunsuri

SOLUȚIILE TESTELOR DE AUTOEVALUARE POT FI CONSULTATE AICI:
(Scanați codul QR cu camera telefonului, nu din aplicația Mate2000+)

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I. ECUAŢII ŞI SISTEME DE ECUAŢII LINIARE

1. Ecuaţii de gradul I cu o necunoscută

1. a) 2; b) 4; c) –4; d) 2; e) 3; f) –4; g) –4; h) –4; i) 4; j) 3; k) 4; l) 4; m) 6; n) –3; o) –4; p) 6. **2.** a) $S = \{2\}$; b) $S = \{5\}$; c) $S = \{-4\}$; d) $S = \{-6\}$; e) $S = \{6\}$; f) $S = \{-6\}$; g) $S = \{4\}$; h) $S = \{5\}$; i) $S = \{-7\}$; j) $S = \{5\}$; k) $S = \{-7\}$; l) $S = \{-9\}$; m) $S = \{7\}$; n) $S = \{-11\}$; o) $S = \{-5\}$; p) $S = \{7\}$. **3.** a) 3; b) 7; c) –20; d) 3; e) 6; f) –6; g) 5; h) –4; i) 2; j) 8; k) 7; l) 10; m) 3; n) –5,4; o) 4; p) $-\frac{1}{2}$; r) $-\frac{3}{4}$; s) 3. **4.** a) $S = \{3\}$, da; b) $S = \{6\}$, da; c) $S = \{-7\}$, da; d) $S = \{-10\}$, da; e) $S = \{1\}$, da; f) $S = \{6\}$, da. **5.** a) 5; b) –5; c) –12; d) $\frac{3}{2}$; e) 3. **6.** a) 7; b) –2; c) –1; d) 4; e) –3; f) 1; g) 1; h) –1. **7.** a) –2; b) –9; c) –1; d) –3; e) –1. **8.** a) –25; b) –3; c) –1; d) 7; e) 7; f) –13; g) –1; h) –14; i) 4; j) 18; k) –4; l) $11\frac{1}{2}$; m) 5; n) 1; o) –3; p) 7; r) –13; s) 5. **9.** a) 2; b) –3; c) 5; d) 4; e) 6; f) 2; g) 9. **10.** a) –1; b) 21; c) 2; d) 7; e) 3; f) 1; g) –3; h) –13; i) 7; j) 5; k) 3; l) 8; m) 1; n) 4; o) 7. **11.** a) 2; b) –2; c) –3; d) 3; e) 1; f) 8; g) 13; h) 3; i) –4; j) –3; k) 10; l) 3. **12.** a) 3; b) 5; c) 6; d) 6; e) 4. **13.** a) 19; b) 2; c) –7; d) 4; e) 1; f) 3; g) 2; h) 3; i) –6; j) –1. **14.** a) 2; b) $-\frac{4}{3}$; c) –7; d) 1; e) 2; f) 3; g) –6; h) –1. **15.** a) –9; b) –2; c) 2; d) 20; e) 2; f) –3; g) 5. **16.** a) 1; b) –3; c) –5; d) 1; e) 1; f) 2. **17.** a) –3; b) 10; c) 4; d) 8; e) –17; f) –5. **18.** a) 5; b) 2; c) 6; d) 3; e) –2; f) 13; g) 29; h) 10; i) 12; j) $\frac{2}{3}$; k) 6. **19.** a) –25; b) $-\frac{3}{2}$; c) –6; d) 8; e) 5; f) –2; g) 5; h) 4; i) 8; j) –12; k) –4. **20.** a) 9; b) 2; c) 22; d) 19; e) –3; f) –1; g) 7; h) –7; i) 1. **21.** a) 5; b) 1; c) 11; d) 3; e) 1; f) 3; g) 2; h) –1; i) –3; j) 3. **22.** a) –2; b) 11; c) $\frac{10}{13}$; d) –2; e) –1; f) 1. **23.** a) 5; b) $\frac{31}{4}$; c) 2; d) $\frac{4}{5}$. **24.** a) $\frac{4}{3}$; b) –2; c) $-\frac{1}{5}$; d) 5; e) $\frac{31}{4}$; f) $-\frac{15}{32}$. **25.** a) 2; b) $2-\sqrt{2}$; c) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$; d) $2\sqrt{5}$; e) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; f) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$; g) $-\frac{3\sqrt{10}}{5}$. **26.** a) $\frac{3\left(1-2\sqrt{2}\right)}{7}$; b) $3\sqrt{3}$; c) –1; d) 5; e) $-\frac{5\sqrt{3}+6}{13}$; f) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; g) $\frac{\sqrt{5}}{2}$; h) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; i) $\sqrt{3}$; j) $2\sqrt{3}-2$; k) $\frac{3\sqrt{5}+7}{2}$. **27.** a) 1; b) $-\frac{13}{28}$; c) 2; d) 1. **28.** a) $\frac{2}{3}$; b) 1; c) 1. **29.** a) $x \in \{-1; 7\}$; b) $x \in \{-7; 3\}$; c) $x \in \{-2; 3\}$; d) $x \in \{-5; 4\}$; e) $x \in \{-6; 1\}$; f) $x \in \{-3; 6\}$. **30.** $x \in \{-2; 8\}$. **31.** a) $x \in \{-3; 3\}$; b) $x \in \{-5; 5\}$; c) $x \in \{-1; 1\}$; d) $x \in \{-5; 5\}$; e) $x \in \{-10; 12\}$; f) $x \in \{1; 7\}$; g) $x \in \{-3; 7\}$; h) $x \in \{-7; 17\}$; i) $x \in \{-5; 2\}$; j) $x \in \{-8; 7\}$; k) $x \in \{-5; 6\}$; l) $x \in \{-8; 1\}$; m) $x \in \{-7; 2\}$; n) $x \in \{-12; 4\}$. **32.** a) $x \in \{-14; -6; 0; 8\}$; b) $x \in \{-15;$

59. $p\% = 20\%$. **60.** $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{20}$ și $12\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+24\cdot\frac{1}{y}=1 \Rightarrow x = 30, y = 60$.

5. Probleme de matematică aplicată în viaţa cotidiană

1. $p = 215$ elevi; $g = 565$ elevi. **2.** $a + (a - 11) + (a + 7) = 173 \Rightarrow a = 59 \Rightarrow 59$ de cărți pe raftul de sus, 48 de cărți pe raftul din mijloc și 66 de cărți pe raftul de jos. **3.** $a = 162$; $b = 17$; $c = 37$. **4.** $m = t = 42$ ani; $f = 12$ ani. **5.** $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{16}$; $12\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+20\cdot\frac{1}{b}=1 \Rightarrow a = 20$ ore, $b = 80$ ore.

Recapitulare şi sistematizare prin teste

Testul 1: **1.** a) $x = -3$; b) $x = 4$; c) $x = 3$. **2.** $a = 70$; $b = 14$. **3.** $S = \{(2; 3)\}$. **4.** $120\% \cdot 115\%x = 207 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{120}{100}\cdot\frac{115}{100}x = 207 \Leftrightarrow \frac{69}{50}x = 207 \Leftrightarrow x = 150$ de lei. **5.** $f + b = 33$ și $f + 2 = 2(b - 5) \Rightarrow b = 15$ și $f = 18$. **6.** $a + b = 140$ și $120\%a + 110\%b = 160 \Rightarrow a = 60$ și $b = 80$.

Testul 2: **1.** a) $x = -4$; b) $x = 6$; c) $x = -4$. **2.** $\frac{a}{b}=\frac{2}{5}$ și $2b + a = 180 \Rightarrow a = 30$, $b = 75$. **3.** $S = \left\{\left(\sqrt{3}; -\sqrt{2}\right)\right\}$. **4.** I. $40\%x$; II. 40% din rest $\Rightarrow 40\% \cdot 60\%x = 24\%x$; III. 252 de lei; $x - (40\%x + 24\%x) = 252$; $36\%x = 252 \Rightarrow x = 700$ de lei. **5.** $a - b = 40$ și $3b + 2a = 240 \Rightarrow a = 72$ și $b = 32$. **6.** $a + b + c = 154$; $b = a - 12$ și $c = \frac{a+b}{6} \Rightarrow a + b = 6c \Rightarrow c = 22$; $a = 72$; $b = 60$.

Testul 3: **1.** a) $x = \sqrt{6}$; b) $x = 3$; c) $x = -4$. **2.** $a = 72$; $b = 28$. **3.** $S = \{(2; 4)\}$; $x \neq 2y$. **4.** $75\% \cdot 112\%x = 168$; $\frac{21}{25}x = 168 \Leftrightarrow x = 200$ de lei. **5.** Notăm cu f numărul fetelor și cu b numărul băieților. $f = 3b$; $b + 4 = \frac{2}{3}(f - 6) \Rightarrow b + 4 = 2(b - 2)$, $b = 8$; $f = 24$. **6.** Notăm cu b numărul de bănci: $2(b - 3) + 1 = 3(b - 8) + 2 \Rightarrow 17$ bănci și 29 de elevi.

Testul 4: **1.** a) $x = 2\sqrt{3}$; b) $x = -1$; c) $x = -2$. **2.** $a + b = 96$ și $a = 2b + 24$; $b = 24$; $a = 72$. **3.** $S = \{(3; 4)\}$. **4.** $a + b = 75$ și $110\%a + 120\%b = 86$ sau $a + b = 75$ și $10\%a + 20\%b = 11 \Rightarrow a = 40$ de lei; $b = 35$ de lei. **5.** $a + b + c = 276$; $b = 60 + \frac{a}{2}$; $c = 52 + \frac{a+b}{3} \Rightarrow c = 72 + \frac{a}{2}$; $a = 72$; $b = 96$; $c = 108$. **6.** I. $10\%x$; II. $12\%x$; III. $13\%x$; Mențiuni 80% din $35\%x = 28\%x$; $x - (35\%x + 28\%x) = 74 \Leftrightarrow 37\%x = 74 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = 200$ de elevi.

Capitolul II. Elemente de organizare a datelor

1. Produsul cartezian a două mulţimi nevide. Sistem de axe ortogonale în plan. Reprezentarea punctelor într-un sistem de axe ortogonale. Distanţa dintre două puncte din plan

1. a) $A \times B = \{(-3; 1), (-3; 2), (-3; 3), (-1; 1), (-1; 2), (-1; 3), (1; 1), (1; 2), (1; 3)\}$; $B \times A = \{(1; -3), (1; -1), (1; 1), (2; -3), (2; -1), (2; 1), (3; -3), (3; -1), (3; 1)\}$; b) $A \times A = \{(-3; -3), (-3; -1), (-3; 1), (-1; -3), (-1; -1), (-1; 1), (1; -3), (1; -1), (1; 1)\}$; $B \times B = \{(1; 1), (1; 2), (1; 3), (2; 1), (2, 2), (2; 3), (3; 1), (3; 2), (3; 3)\}$. **2.** $A \cap B = \varnothing$; $A \times B = \{(1; -2), (1; -1), (2; -2), (2; -1), (3; -2), (3; -1)\}$; $B \times A = \{(-2; 1), (-2; 2), (-2; 3), (-1; 1), (-1; 2), (-1; 3)\}$. **3.** $A = \{-2, -1, 1, 2\}$; $A \times B = \{(-2; -1), (-2; 0), (-2; 1), (-1; -1), (-1; 0), (-1; 1), (1; -1), (1; 0), (1; 1), (2; -1), (2; 0), (2; 1)\}$; $B \times A = \{(-1; -2), (-1; -1),$

GEOMETRIE

Capitolul I. ASEMĂNAREA TRIUNGHIURILOR

1. Raportul a două segmente. Teorema lui Thales

1.1. Raportul a două segmente

1. a) $\frac{3}{2}$; b) $\frac{2}{5}$; c) $\frac{3}{5}$; d) $\frac{5}{2}$; e) $\frac{2}{3}$. **2.** $\frac{MN}{PQ} = 1$; $\frac{PQ}{MN} = 1$. **3.** $\frac{19}{6}$. **4.** a) 1; b) $\frac{1}{2}$; c) 2; d) $\frac{1}{2}$; e) 2. **5.** a) $\frac{2}{7}$; b) $\frac{3}{4}$; c) $\frac{2}{3}$; d) $\frac{1}{2}$; e) $\frac{3}{5}$. **6.** a) $A - C - B$: $AC = 4$ cm; b) $A - B - C$: $AC = 60$ cm. **7.** $AE = 9$ cm; $EB = 27$ cm; $AF = 9$ cm; $FB = 27$ cm. **8.** a) $\frac{5}{4}$; b) $\frac{5}{9}$; c) $\frac{9}{5}$; d) $\frac{4}{9}$. **9.** $MA = 16$ cm; $MB = 32$ cm. **10.** $\mathscr{P} = 105$ cm. **11.** a) $\frac{2}{3}$; b) $\frac{13}{4}$; c) $\frac{1}{10}$; d) $\frac{5}{8}$. **12.** a) $\frac{7}{15}$; b) $\frac{1}{5}$; c) $\frac{14}{15}$; d) $\frac{4}{15}$; e) $\frac{7}{15}$; f) $\frac{4}{7}$. **13.** a) $\frac{DE}{AB} = \frac{1}{2}$ și $\frac{CD}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{DE}{AB} = \frac{CD}{BC}$, unde $AB = 16$ cm; $BC = 64$ cm; $CD = 32$ cm; $DE = 8$ cm; b) $AB = 2$ cm; $BC = 30$ cm și $\frac{CD}{DE} = 15$; cum $\frac{BC}{AB} = 15 \Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{CD}{DE}$; c) $AB = \frac{8}{3}$ dm; $BC = \frac{2}{3}$ dm; $CD = 20\%DE \Rightarrow \frac{CD}{DE} = \frac{1}{5}$ și $\frac{BC}{AB} = \frac{1}{4}$ nu sunt proporționale; d) $\frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}$ și $\frac{CD}{DE} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{CD}{DE}$. **14.** a) *I.* $P \in AB$; $\frac{AP}{PB} = \frac{2}{7} \Rightarrow \frac{AP}{2} = \frac{PB}{7} = k \Rightarrow AP = 2k$; $PB = 7k$; $AP + PB = AB \Rightarrow 9k = 135 \Rightarrow k = 15 \Rightarrow AP = 30$ cm; $PB = 105$ cm; *II.* $P \in AB$ astfel încât $A \in PB \Rightarrow PB - PA = AB \Rightarrow 5k = 135 \Rightarrow k = 27 \Rightarrow AP = 54$ cm; $PB = 189$ cm; b) $\frac{AP}{PB} = \frac{5}{4}$; *I.* $P \in AB \Rightarrow \frac{AP}{5} = \frac{PB}{4} = k \Rightarrow AP = 5k$; $PB = 4k$; $AP + PB = AB \Rightarrow 9k = 135 \Rightarrow k = 15 \Rightarrow AP = 75$ cm; $PB = 60$ cm; *II.* $P \in AB$ astfel încât $B \in AP \Rightarrow AB = PA - PB \Rightarrow k = 135$; $AP = 675$ cm; $PB = 540$ cm. **15.** $BM \parallel DD' \parallel EE' \parallel FF'$ și $BD = DE = EF = FC \Rightarrow MD' = D'E' = E'F' = F'C = 16$ cm (conf. Paralele echidistante). În ΔBCM: EE' este linie mijlocie $\Rightarrow EE' = \frac{BM}{2} = 12$ cm; în $\Delta CEE'$: FF' este linie mijlocie $\Rightarrow FF' = \frac{EE'}{2} = 6$ cm; în trapezul $BME'E$: DD' este linie mijlocie: $DD' = \frac{EE'+BM}{2} \Rightarrow DD' = 18$ cm; $ME' = 32$ cm; $MF' = D'C = 48$ cm. **16.** $\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} BE \parallel AD \\ CF \parallel AD \end{array}\right\} \Rightarrow BE \parallel CF \\ \text{cum } BD \equiv CD \end{array}\right\} \Rightarrow AD$ este linie mijlocie $\Rightarrow AE \equiv AF$.

17. În ΔABC: ED – linie mijlocie, deci: $ED \parallel BC$ (1) și $ED = \frac{BC}{2}$ (2). În ΔGBC: FH – linie mijlocie, deci $FH \parallel BC$ (3) și $FH = \frac{BC}{2}$ (4). $\left.\begin{array}{l} \text{Din (1) si (3)} \Rightarrow ED \parallel FH \\ \text{Din (2) si (4)} \Rightarrow ED = FH \end{array}\right\} \Rightarrow EFHD$ – paralelogram. **18.** $OA = OB = a$; Avem $AB = BC = a$, $AC = CD = 2a$, $BD = DE = 3a$, $CE = EF = 5a$; $\frac{AC}{BE} + \frac{BC}{CD} + \frac{AB}{AD} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12}$; $\frac{BF}{AF} = \frac{11}{12} \Rightarrow \frac{13}{12} > \frac{11}{12}$ (A) (*fig. 1*).

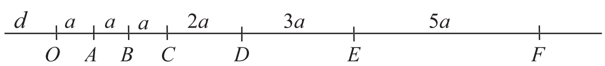


Fig. 1

CAPITOLUL II. RELAŢII METRICE ÎN TRIUNGHIUL DREPTUNGHIC

1. Teorema înălţimii

1. a) A; b) A; c) A; d) A; e) A; f) F; g) F. **2.** $BD = 27$ cm; $DC = 48$ cm. **3.** $\frac{MN}{NP} = 1$; $\frac{RC}{RQ} = 1$; $\frac{MP}{CQ} = 1$; $\frac{NP}{NC} = \frac{1}{4}$; $\frac{MC}{NR} = \frac{5}{3}$; $\frac{MQ}{NC} = \frac{3}{4}$; $\frac{PC}{MQ} = 1$. **4.** $AD = 96$ cm. **5.** a) $CD = 32$ cm; $BC = 50$ cm; b) $AD = 12$ cm; $BC = 26$ cm. **6.** a) $BC = 10$ dm; $AD = 4{,}8$ dm; b) $BD = 12{,}8$ dm, $BC = 20$ dm. **7.** $DE = 24$ cm; $\mathscr{A} = 1440$ cm^2. **8.** $OM = 24$ cm; $\mathscr{A} = 2400$ cm^2. **9.** a) $AD = 36$ cm; b) $\mathscr{A} = 1404$ cm^2. **10.** a) $AM = 24$ cm; b) $\mathscr{A} = 1152$ cm^2. **11.** a) $NQ = 14{,}4$ dm; $MQ = 19{,}2$ dm; b) $PQ = 16$ dm; $MQ = 12$ dm. **12.** a) $AD = 24$ dm; $\mathscr{A}_{ABC} = 624$ cm^2; b) $BC = 50$ cm; $\mathscr{A}_{ABC} = 600$ cm^2. **13.** a) $BD = 27$ dm; $BC = 75$ dm; b) $\mathscr{A}_{ABC} = 1350$ dm^2. **14.** a) 9 dm; 36 dm; b) 18 dm. **15.** $AD = 6\sqrt{3}$ cm; $\mathscr{A}_{ABC} = 72\sqrt{3}$ cm^2. **16.** $\mathscr{P} = 60$ cm; $\mathscr{A} = 180$ cm^2. **17.** $AD = 4\sqrt{3}$ cm; $\mathscr{A}_{ABC} = 72$ cm^2. **18.** $AD = 18$ cm. **19.** $AD = 6\sqrt{2}$ cm; $\mathscr{A}_{ABC} = 72$ cm^2.

2. Teorema catetei

1. a) $CD = 4$ cm; $AB = 8\sqrt{5}$ cm; $AC = 4\sqrt{5}$ cm; $AD = 8$ cm; b) $BD = 10{,}8$ cm; $CD = 19{,}2$ cm; $AC = 24$ cm; $AD = 14{,}4$ cm; c) $BC = 100$ cm; $CD = 64$ cm; $AC = 80$ cm; $AD = 48$ cm. **2.** $\mathscr{A} = 720$ cm^2; $\mathscr{P} = \left(36\sqrt{5} + 60\right)$ cm. **3.** a) $\frac{BD}{CD} = \frac{1}{3}$; b) $\mathscr{A} = 162\sqrt{3}$ cm^2; $\mathscr{P} = 18\left(3 + \sqrt{3}\right)$ cm. **4.** a) $\mathscr{P} = 160$ cm; b) $\mathscr{A} = 1200$ cm^2. **5.** $\mathscr{P} = 36\sqrt{5}$ cm; $\mathscr{A} = 360$ cm^2. **6.** $\mathscr{A} = 216$ cm^2; $\mathscr{P} = \left(48 + 12\sqrt{5}\right)$ cm. **7.** a) $NP = 20$ cm, $MN = 12$ cm, $MP = 16$ cm; $MQ = \frac{48}{5}$ cm; b) $NP = 60$ cm, $PQ = 38{,}4$ cm, $MP = 48$ cm; $MQ = 28{,}8$ cm. **8.** a) $BC = 45$ cm, $BD = 28{,}8$ cm, $AB = 36$ cm, $AD = 21{,}6$ cm; b) $BC = 75$ cm, $AB = 45$ cm, $AC = 60$ cm, $AD = 36$ cm. **9.** $BD = 25$ cm, $CD = 144$ cm, $BC = 169$ cm, $AC = 156$ cm, $AD = 60$ cm. **10.** a) $EF = 45$ cm, $FG = 75$ cm; b) $FT = 27$ cm, $TG = 48$ cm, $EG = 60$ cm. **11.** a) $BD = 6$ cm, $CD = 18$ cm; b) $AC = 12\sqrt{3}$ cm; c) $\mathscr{P} = 12\left(3 + \sqrt{3}\right)$ cm, $\mathscr{A} = 72\sqrt{3}$ cm^2. **12.** a) $BC = 25$ cm; $DC = 16$ cm; $AD = 12$ cm; $AC = 20$ cm; b) $DC = 32$ cm; $AB = 30$ cm; $BC = 50$ cm; $AC = 40$ cm. **13.** a) $BC = 75$ cm; $AD = 36$ cm; $AB = 45$ cm; $AC = 60$ cm; b) $BC = 50$ cm; $BD = 18$ cm; $AD = 24$ cm; $AB = 30$ cm. **14.** a) $BC = 250$ cm; $AB = 240$ cm; $BD = 230{,}4$ cm; $AD = 67{,}2$ cm; b) $BC = 100$ cm; $AB = 20\sqrt{5}$ cm; $AC = 40\sqrt{5}$ cm; $AD = 40$ cm. **15.** a) $BC = 50$ cm; $CD = 32$ cm; $AC = 40$ cm; $AD = 24$ cm; b) $BC = 75$ cm; $AB = 45$ cm; $AC = 60$ cm; $AD = 36$ cm. **16.** a) $BD = 21{,}6$ cm; $CD = 38{,}4$ cm; $AB = 36$ cm; $AC = 48$ cm; $AD = 28{,}8$ cm; b) $BD = 18$ cm; $CD = 32$ cm; $BC = 50$ cm; $AB = 30$ cm; $AC = 40$ cm; $AD = 24$ cm. **17.** a) $BD = 5{,}4$ cm; $CD = 9{,}6$ cm; $AB = 9$ cm; $AC = 12$ cm; $BC = 15$ cm; $AD = 7{,}2$ cm; b) $BD = \frac{72}{5}$ cm; $CD = \frac{128}{5}$ cm; $AB = 24$ cm; $AC = 32$ cm; $AD = \frac{96}{5}$ cm. **18.** $BD = 9$ cm; $CD = 16$ cm; $BC = 25$ cm; $AB = 15$ cm; $AC = 20$ cm. **19.** a) $CD = 30$ cm; $AB = 75$ cm; $AC = 15\sqrt{10}$ cm; b) $\mathscr{P} = 15\left(\sqrt{6} + \sqrt{15} + 7\right)$ cm; $\mathscr{A} = \frac{1575\sqrt{6}}{2}$ cm^2. **20.** $\mathscr{P} = 186$ cm; $\mathscr{A} = 1728$ cm^2. **21.** a) $AB = 48\sqrt{3}$ cm; $CD = 24\sqrt{3}$ cm; b) $AD = 24\sqrt{3}$ cm; $AC = 24\sqrt{6}$ cm; c) $\mathscr{P} = 96\sqrt{3} + 24\sqrt{6}$ cm; $\mathscr{A} = 2592$ cm^2. **22.** a) $AB = 48$ cm; $CD = 36$ cm; b) $AD = 12\sqrt{3}$ cm; $AC = 24\sqrt{3}$ cm; c) $\mathscr{P} = 108 + 12\sqrt{3}$ cm; $\mathscr{A} = 504\sqrt{3}$ cm^2. **23.** a) $CD = 27$ cm; $AB = 60$ cm; $AD = 36$ cm; b) $\mathscr{P} = 180$ cm; $\mathscr{A}_{ABC} = 1350$ cm^2;

$AB = 2a \Rightarrow AE = EB = BG = a$; $\mathcal{A}_{BEF} = \dfrac{ab}{2}$; $\mathcal{A}_{AGCD} = \dfrac{5ab}{2} \Rightarrow \dfrac{\mathcal{A}_{BEF}}{\mathcal{A}_{AGCD}} = \dfrac{1}{5}$.

Testul 2: 1. $\mathcal{A} = 1350$ cm^2; $\mathcal{P} = 180$ cm. **2.** a) $\mathcal{A}_{ABC} = 216\sqrt{2}$ cm^2; b) $18\sqrt{2}$ cm; c) $AE = 12\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)$ cm; $CE = 24\sqrt{9-3\sqrt{6}}$ cm. **3.** a) $AD = 6\sqrt{13}$ cm; $AB = 9\sqrt{13}$ cm; b) $\mathcal{A} = 702$ cm^2; c) $\sin \sphericalangle BDC = \dfrac{2\sqrt{13}}{13}$. **4.** a) $\mathcal{P} = 40$ cm; b) $\mathcal{A} = 48\sqrt{3}$ cm^2; c) $\sin(\sphericalangle ABD) = \dfrac{1}{2}$.

Testul 3: 1. Notăm cu l latura triunghiului echilateral AMN și cu P mijlocul laturii MN. De aici rezultă că punctele A, P, C sunt coliniare. Deci $AC = AP + CP \Rightarrow AC = \dfrac{l\left(\sqrt{3}+1\right)}{2} \Rightarrow l = 12\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$ cm $\Rightarrow \mathcal{A}_{AMN} = 144\left(2\sqrt{3}-3\right)$ cm^2. **2.** a) $\mathcal{A} = 96$ cm^2; b) Fie M, N, P, Q mijloacele laturilor AD, DC, BC și, respectiv, AB. Deoarece laturile patrulaterului $MNPQ$ sunt paralele cu diagonalele AC și BD, atunci el este paralelogram; c) $\mathcal{A}_{MNPQ} = \mathcal{A}_{ABCD} - [\mathcal{A}_{AMQ} + \mathcal{A}_{DMN} + \mathcal{A}_{PBQ} + \mathcal{A}_{PNC}] = 48$ cm^2. **3.** a) $\mathcal{A}_{ABCD} = 1536$ cm^2; b) $d(D, AB) = \dfrac{192}{5}$ cm. **4.** a) $OO'^2 = O'C \cdot OB \Rightarrow OO' = 24$ cm; $\mathcal{A} = 1440$ cm^2; b) $\Delta AMB \sim \Delta DMC \Rightarrow \dfrac{\mathcal{A}_{MDC}}{\mathcal{A}_{MAB}} = \left(\dfrac{DC}{AB}\right)^2 \Rightarrow \dfrac{\mathcal{A}_{MDC}}{\mathcal{A}_{MAB}} = \dfrac{1}{16} \Rightarrow \mathcal{A}_{MDC} = 96$ cm^2.

Testul 4: 1. $\sphericalangle AOB = 135°$. **2.** a) $AB = 48$ cm; $AC = 64$ cm; $BC = 80$ cm; b) $\mathcal{A}_{ABC} = 1536$ cm^2. **3.** a) $\mathcal{A} = 252$ cm^2; b) $\mathcal{A}_{COD} = \dfrac{324}{7}$ cm^2; $\mathcal{A}_{AOB} = \dfrac{576}{7}$ cm^2; c) $\mathcal{A}_{ABD} = \mathcal{A}_{ABC} = 144$ cm^2; $\mathcal{A}_{AOD} = \mathcal{A}_{BOC} = \dfrac{432}{7}$ cm^2. **4.** a) $\mathcal{A}_{AMN} = 90$ cm^2; b) $d(M, AN) = \dfrac{30}{\sqrt{13}}$ cm.

TESTE RECAPITULATIVE

Testul 1

I. 1. $x = -2$. **2.** $x \in \{-2; 5\}$. **3.** 10. **4.** $AM = 10$ cm. **5.** $\mathcal{A}_{ABCD} = 24$ cm^2. **6.** $\mathcal{P}_{AMN} = 36$ cm.

II. 1. a) $x = 1$; b) $20 + 60\%(x - 20) + \dfrac{1}{3}x = x \Rightarrow x = 120$ de lei. **2.** $S = \{(1; 2)\}$. **3.** a) $BC = 12$ cm; b) $\mathcal{A}_{ABC} = 18\sqrt{3}$ cm^2. **4.** a) $\mathcal{P}_{ABCD} = 32$ cm; b) $\mathcal{A}_{ABCD} = 48$ cm^2.

Testul 2

I. 1. $x = 4$. **2.** $x \in \{-2; 7\}$. **3.** $AB = 5$. **4.** $\mathcal{P} = 36$ cm. **5.** $AC = 12$ cm. **6.** $\mathcal{P}_{MDC} = 38$ cm.

II. 1. a) $x = 2$; b) I zi – $\dfrac{4}{9}x$; a II-a zi – $30\% \cdot \dfrac{5}{9}x$; a III-a zi ultimii 35 km. Deci în a II-a zi a parcurs: $\dfrac{30}{200} \cdot \dfrac{5x}{9} = \dfrac{1}{6}x$ și formăm ecuația $\dfrac{4}{9}x + \dfrac{1}{6}x + 35 = x \Rightarrow x = 90$ km. **2.** $S = \{(2; 3)\}$. **3.** a) $AD = 4\sqrt{3}$ cm; b) $\mathcal{A}_{ABC} = 30\sqrt{3}$ cm^2. **4.** a) $BC = 4\sqrt{2}$ cm; $AD = 4$ cm; $\mathcal{P}_{ABCD} = 20 + 4\sqrt{2}$ cm $= 4(5 + \sqrt{2})$ cm; b) $\mathcal{A}_{ABCD} = 32$ cm^2.

Testul 3

I. 1. $x = 2$. **2.** $x \in \{-6; -1\}$. **3.** $AB = 13$. **4.** $A = 18\sqrt{3}$ cm^2. **5.** $A = 24\sqrt{3}$ cm^2. **6.** $\mathcal{P}_{BCD} = 56$ cm.

II. 1. a) $x = 3$; b) $40 + 40\%(x - 40) + 30\%x = x \Rightarrow x = 80$ lei. **2.** $S = \{(2; 3)\}$. **3.** a) $\mathcal{P}_{ABC} = 2AB + BC \Leftrightarrow 2AB + \dfrac{6}{5}AB = 64 \Leftrightarrow \dfrac{16}{5}AB = 64 \Leftrightarrow AB = 20$ cm; $BC = 24$ cm; $AD = 16$ cm, $\mathcal{A}_{ABC} = 192$ cm^2;

ghic, FE este mediană, deci $FE = \frac{AD}{2}$, cum $AD = 6\sqrt{7}$ cm $\Rightarrow FE = 3\sqrt{7}$ cm.

Testul 8

I. 1. $x = 2$. **2.** $x = \sqrt{2}$. **3.** $\mathcal{A}_{ABC} = 4$. **4.** $4\sqrt{2}$ cm. **5.** $\mathcal{P}_{ABCD} = 42$ cm. **6.** $EF = 12$ cm.

II. 1. a) $x = -3$; b) I_M: $\frac{5}{12}x$; Rest: $\frac{7x}{12}$; II_M: $\frac{9}{14} \cdot \frac{7}{12}x = \frac{3x}{8}$; III_M: $\frac{3x}{8} - 60$. Deci $\frac{5}{12}x + \frac{3x}{8} + \frac{3x}{8} - 60 = x$; $\frac{5}{12}x + \frac{3x}{4} - x = 60 \Leftrightarrow x = 360$ lei. **2.** $S = \{(3; 2)\}$. **3.** a) $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle BDC$ (alterne interne) și $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CBD$ (ip) $\Rightarrow \sphericalangle BDC \equiv \sphericalangle CBD \Rightarrow \Delta BCD$ – isoscel $\Rightarrow BC = DC = 10$ cm; b) Fie $CE \perp AB$, $E \in AB$, $BE = 6$ cm $\Rightarrow CE = 8$ cm; $\mathcal{A}_{ABCD} = 104$ cm^2. **4.** a) $\Delta COD \sim \Delta AOB$ ($CD \parallel AB$). T.F.A. $\Rightarrow \frac{CO}{AO} = \frac{DO}{BO} = \frac{CD}{AB} \Leftrightarrow \frac{DO}{BO} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$; dar $\frac{DM}{AM} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{DO}{BO} = \frac{DM}{AM} = \frac{1}{3} \overset{\text{R.Th.}}{\Rightarrow} OM \parallel AB$; b) $\Delta DMO \sim \Delta DAB$ ($OM \parallel AB$) T.F.A. $\Rightarrow \frac{DO}{BD} = \frac{OM}{AB} = \frac{DM}{AD} \Leftrightarrow \frac{OM}{45} = \frac{5}{20} \Leftrightarrow OM = \frac{45}{4}$ cm.

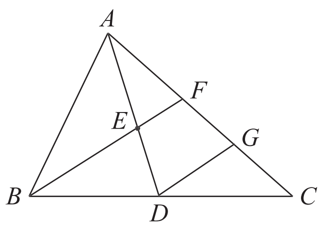
MODELE DE TESTE PENTRU EVALUAREA NAȚIONALĂ

Testul 1

Subiectul I. 1. b). **2.** d). **3.** b). **4.** b). **5.** a). **6.** a).

Subiectul al II-lea. 1. c). **2.** c). **3.** b). **4.** c). **5.** d). **6.** b).

Subiectul al III-lea. 1. $a - b = 45$; $\frac{2}{3}a = 48 + \frac{3}{5}b \Rightarrow 10a = 720 + 9b \Rightarrow$ a) $a = 315$; b) $b = 270$. **2.** a) $AM^2 = (x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2 \Rightarrow AM = \sqrt{13}$; b) $B = \mathrm{sim}_M A \Rightarrow AM = BM$; $M(x_M, y_M) \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$, $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$; $m = 4$; $p = 3$. **3.** a) $a = |2 - 3\sqrt{3}| - |3 - 2\sqrt{3}| = 3\sqrt{3} - 2 - 2\sqrt{3} + 3 = \sqrt{3} + 1$; $b = |\sqrt{2} - \sqrt{3}| + |1 - \sqrt{2}| = \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{2} - 1 = \sqrt{3} - 1$; b) $m_g = \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{2}$. **4.** $S = \{(2, 3)\}$.
5. a) Fie $DG \parallel BF$, $G \in AC$. În ΔADG, EF este linie mijlocie $\Rightarrow DG = 2EF$ și $AF \equiv FG$ (1). În ΔBCF, DG este linie mijlocie $\Rightarrow BF = 2DG$ și $FG \equiv GC$ (2). Deci, $BF = 2DG$ și $DG = 2EF \Rightarrow BF = 4EF$; b) Din (1) $\Rightarrow AF \equiv FG$, iar din (2) $\Rightarrow FG \equiv GC$. Rezultă că $AF \equiv FG \equiv GC \Rightarrow AC = 3AF$. **6.** a) $BD \equiv CD \Rightarrow CD = 15$ cm $\Rightarrow EC = 9$ cm. Cu teorema catetei în ΔADC: $DC^2 = CE \cdot AC \Rightarrow AC = 25$ cm; b) $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin(\sphericalangle BAC)}{2}$; $AD^2 = AC^2 - CD^2 = 25^2 - 15^2 = 20^2 \Rightarrow AD = 20$ cm $\Rightarrow \sin(\sphericalangle BAC) = \frac{24}{25}$.



Testul 2

Subiectul I. 1. b). **2.** b). **3.** d). **4.** c). **5.** b). **6.** a).

Subiectul al II-lea. 1. d). **2.** c). **3.** c). **4.** a). **5.** c). **6.** d).

Subiectul al III-lea. 1. a) $a = \frac{1}{7}p$; $a + 2 = \frac{3}{13}(p - 2)$, unde a este numărul elevilor absenți și p este numărul elevilor prezenți, de unde se obține că efectivul clasei este 32; $a = 4$ elevi și $p = 28$ elevi; b) $p = 28$. **2.** a) $M \in AB$ astfel încât $AM = MB$; $M(x_M, y_M) \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$, $y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow a = 1$, $b = -5$; $B(1, -5)$; b) $AB^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 \Rightarrow AB = 2\sqrt{10}$. **3.** a) $a = \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{2}} + \frac{6\sqrt{6}}{\sqrt{3}} -$

Cuprins