Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.N. nr. 4696/02.08.2019.
Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programa școlară în vigoare pentru clasa a VI-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Referință științifică: Lucrarea a fost definitivată prin contribuția și recomandările Comisiei științifice și metodice a publicațiilor Societății de Științe Matematice din România. Aceasta și-a dat avizul favorabil în ceea ce privește alcătuirea și conținutul matematic.

Redactare: Andreea Roșca
Tehnoredactare: Adriana Vlădescu
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
ZAHARIA, MARIA
Matematică : algebră, geometrie : clasa a VI-a /
Maria Zaharia, Dan Zaharia. – Ed. a 13-a, reviz. –
Pitești : Paralela 45, 2024 –
vol.
ISBN 978-973-47-4090-1
Partea 2. – 2024. – ISBN 978-973-47-4188-5
I. Zaharia, Dan
51

COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ

EDITURA PARALELA 45
Bulevardul Republicii, Nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești,
jud. Argeș, cod 110177
Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492
E-mail: **comenzi@edituraparalela45.ro**
sau accesați **www.edituraparalela45.ro**

Tiparul executat la tipografia *Editurii Paralela 45*
E-mail: tipografie@edituraparalela45.ro

Copyright © Editura Paralela 45, 2024
Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate,
iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.
www.edituraparalela45.ro

EDITURA PARALELA 45

Dan ZAHARIA
Maria ZAHARIA

matematică
algebră
geometrie

clasa a VI-a

partea a II-a

ediția a XIII-a, revizuită

mate 2000 – consolidare

EDITURA PARALELA 45

Algebră

Capitolul
Mulțimea numerelor întregi

PP Competenţe specifice şi exemple de activităţi de învăţare

1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

1.3. Identificarea caracteristicilor numerelor întregi în contexte variate
- *Identificarea unui număr întreg în situații practice sau interdisciplinare (de exemplu: temperaturi, altitudini, golaveraje, debit/credit)*
- *Reprezentarea pe axa numerelor a opusului unui număr întreg; modulul ca distanță pe axa numerelor de la origine la reprezentarea numărului*
- *Identificarea unor contexte practic-aplicative sau teoretice care folosesc ecuații sau inecuații în mulțimea numerelor întregi*

2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

2.3. Utilizarea operațiilor cu numere întregi pentru rezolvarea ecuațiilor și inecuațiilor
- *Compararea numerelor întregi, pornind de la reprezentările acestora pe axa numerelor*
- *Ordonarea elementelor unei mulțimi finite de numere întregi*
- *Utilizarea regulilor specifice pentru efectuarea operațiilor cu numere întregi: adunare, scădere, înmulțire, împărțire și ridicare la putere cu exponent natural*
- *Validarea (prin probă) a soluției unei ecuații sau a unei inecuații în mulțimea numerelor întregi*

3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

3.3. Aplicarea regulilor de calcul și folosirea parantezelor în efectuarea operațiilor cu numere întregi
- *Aplicarea unor proprietăți ale operațiilor cu numere întregi pentru optimizarea calculelor numerice*
- *Utilizarea regulilor de calcul cu puteri (calcule numerice)*
- *Utilizarea eficientă a metodelor de determinare a unei necunoscute dintr-o ecuație sau inecuație (metoda mersului invers, metoda balanței, transformări ale relațiilor de egalitate/inegalitate)*

4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, a concluziilor și a demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

4.3. Redactarea etapelor de rezolvare a ecuațiilor și a inecuațiilor studiate în mulțimea numerelor întregi
- *Formularea unor răspunsuri logice în raport cu cerințe de calcul numeric (corelații intradisciplinare; de exemplu: apartenența rezultatului unui calcul la o mulțime, estimarea rezultatului, utilizarea lui 0 ca factor în produse de numere)*
- *Scrierea unei ecuații/inecuații echivalente cu o ecuație/inecuație dată*
- *Redactarea demersului de rezolvare a unor ecuații sau inecuații în mulțimea numerelor întregi (inclusiv verificarea soluțiilor)*

EDITURA PARALELA 45

- *Transpunerea unei probleme într-o ecuație care se rezolvă în mulțimea numerelor întregi*
- *Exprimarea unor caracteristici ale modulului, derivate din definiția acestuia ($|x| = a$, $|x| < a$, $|x| \leq a$, unde a și x sunt numere întregi)*

5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date

5.3. Interpretarea unor date din probleme care se rezolvă utilizând numerele întregi

- *Analizarea unor situații practice în care se utilizează numere întregi*
- *Analizarea unor consecințe posibile ce decurg din modificarea unui set de ipoteze în probleme referitoare la numere întregi*
- *Încadrarea soluției unei ecuații într-o mulțime de numere întregi, fără a efectua calcule*

6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

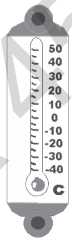
6.3. Transpunerea, în limbaj algebric, a unei situații date, rezolvarea ecuației sau inecuației obținute și interpretarea rezultatului

- *Transpunerea unei situații date în limbaj matematic, utilizând ecuații sau inecuații*
- *Formularea de probleme cu numere întregi pe baza unei scheme date sau a unui exercițiu dat*
- *Formularea unor probleme echivalente cu o problemă dată în contextul numerelor întregi*

EDITURA PARALELA 45

Unitatea: Mulţimea numerelor întregi. Reprezentare pe axa numerelor. Comparare şi ordonare

PE-PP 1. Număr întreg. Mulţimea numerelor întregi. Opusul unui număr întreg. Reprezentarea pe axă a numerelor întregi



La televizor sau la radio auziți zilnic „buletinul meteo”.

Temperaturile pot fi **pozitive**, **zero** sau **negative**.

+3°C se citește „plus 3 grade Celsius”
+28°C se citește „plus 28 de grade Celsius”
–5°C se citește „minus 5 grade Celsius”
–14°C se citește „minus 14 grade Celsius”

Temperaturile negative, zero sau pozitive se înregistrează cu ajutorul **termometrului**.

Dacă dorim să știm înălțimea unui munte sau reperele unei epave de pe fundul oceanului, înseamnă că dorim să știm **altitudinea**. Altitudinea se măsoară luând ca reper **nivelul mării**, care este considerat zero (0) metri.

Vârful unui deal sau înălțimea unui munte se exprimă **printr-un număr precedat de semnul** „+”, iar un punct de pe fundul unui ocean se exprimă **printr-un număr precedat de semnul „–”**.

În cadrul firmelor comerciale se folosesc noțiunile de **credit**, **debit** și **sold**.

Exemple:

a) În luna septembrie, o firmă a încasat 10000 lei pe marfa vândută (**creditul** este +10000 lei) și a cheltuit 5000 lei (**debitul** este –5000 lei). **Soldul** acestei luni este pozitiv, adică +5000 lei, deoarece s-a încasat mai mult cu 5000 lei decât s-a cheltuit.

b) În luna octombrie, o firmă a încasat 300000 lei (**creditul** este +300000 lei) și a cheltuit 400000 lei (**debitul** este –400000 lei). **Soldul** acestei luni este negativ, adică –100000 lei, deoarece s-a încasat mai puțin cu 100000 lei decât s-a cheltuit.

În exemplele date s-au întâlnit numere naturale precedate de semnul „+” sau de semnul „–”. Aceste numere sunt **numere întregi**.

Se numește **număr întreg** numărul natural 0 sau orice număr natural diferit de 0 precedat fie de semnul „+” (plus), fie de semnul „–” (minus).

Observaţii:

- Mulțimea numerelor întregi se notează cu $\mathbb{Z}$.
- Mulțimea {+1, +2, +3, …} este o submulțime a mulțimii numerelor întregi, se notează cu $\mathbb{Z}_+$ și se numește **mulțimea numerelor întregi pozitive**.

EDITURA PARALELA 45

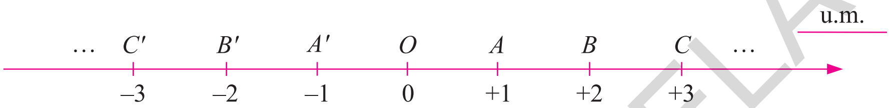
• Mulțimea {–1, –2, –3, …} este o submulțime a mulțimii numerelor întregi, se notează cu $\mathbb{Z}_-$ și se numește **mulțimea numerelor întregi negative**.

• Mulțimea numerelor întregi negative împreună cu mulțimea numerelor întregi pozitive și cu numărul natural 0 formează mulțimea numerelor întregi, adică, avem: $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_+$ și notăm $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$.

• Mulțimea {0; +1; +2; +3; …} se numește **mulțimea numerelor întregi nenegative.**

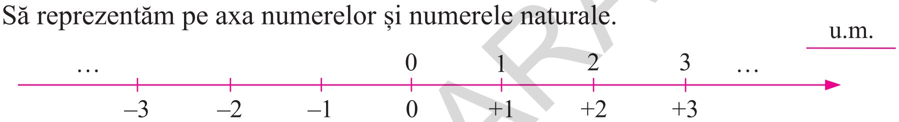
• Se numește **opusul unui număr întreg diferit de zero** acel număr întreg care se obține din numărul întreg considerat prin schimbarea semnului acestuia. Opusul numărului întreg 0 este numărul întreg 0. Opusul numărului întreg +2 este numărul întreg –2, iar opusul numărului întreg –5 este numărul întreg +5.

• Numerele întregi pot fi reprezentate pe axa numerelor. **Axa numerelor** este o dreaptă pe care am fixat: un punct numit **origine**, un **sens pozitiv** și o **unitate de măsură**.



Astfel, fiecărui număr întreg *m*, pe axa numerelor, îi corespunde un punct unic *P*. Vom spune că **punctul *P* are coordonata *m*** sau că ***m* este coordonata punctului *P*** și vom scrie *P*(*m*).

Să reprezentăm pe axa numerelor și numerele naturale.



Se observă că orice număr natural *n* coincide cu numărul întreg +*n* și notăm +*n* = *n*. Astfel, se poate scrie $\mathbb{N}^* = \mathbb{Z}_+$ și $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

• **Numărul 0 nu este nici pozitiv și nici negativ**.

• **Numerele întregi negative** sunt folosite pentru a descrie: adâncimi sub nivelul mării, temperaturi exprimate în grade Celsius sub limita de îngheț, datorii.

Exemple:

a) În ziua de 2 februarie 2024, la ora 6 dimineața, temperatura a fost de –9°C (minus 9 grade Celsius).

b) În Oceanul Atlantic s-a găsit, la adâncimea de 4375 m, o epavă. Adâncimea poate fi exprimată ca fiind –4375 m, raportată la nivelul mării.

c) Pasul Predeal se află la înălțimea de 1040 m. Altitudinea Pasului Predeal, raportată la nivelul mării, poate fi exprimată ca fiind +1040 m.

d) Dacă încasările unei societăți comerciale au fost de 5 milioane lei și plățile au fost de 3 milioane lei, atunci soldul este de 2 milioane lei (+2 milioane lei).

e) Dacă încasările unei societăți comerciale au fost de 2 milioane lei și plățile au fost de 3 milioane lei, atunci soldul este negativ (–1 milion lei), adică societatea are o datorie de 1 milion de lei.

Priviți axa numerelor și observați că există puncte egal depărtate de origine. Punctele *A* și *A′*, punctele *B* și *B′* sunt egal depărtate de originea axei. Dacă două numere nenule sunt coordonatele a două puncte egal depărtate de punctul *O* (originea axei), atunci cele două numere sunt **numere opuse**.

EDITURA PARALELA 45

Exemple:

a) Numerele –1 și +1 corespunzătoare punctelor A' și A sunt numere opuse.

b) Numerele –3 și +3 corespunzătoare punctelor C' și C sunt numere opuse.

În general, dacă notăm cu a un număr natural nenul, atunci:

• **opusul** numărului negativ $-a$ se notează cu $-(-a)$ și este egal cu numărul pozitiv $+a$, adică $-(-a) = +a$.

• **opusul** numărului pozitiv $+a$ se notează cu $-(+a)$ și este egal cu numărul negativ $-a$, adică $-(+a) = -a$.

Reținem!

• Un **număr întreg pozitiv** se reprezintă cu ajutorul unui număr natural nenul precedat de semnul „+”; (exemple: +1, +5, +47, +2025, ...);

• Un **număr întreg negativ** se reprezintă cu ajutorul unui număr natural nenul precedat de semnul „–”; (exemple: –3, –29, –2025, ...);

• Mulțimea formată cu toate **numerele întregi pozitive** ($\mathbb{Z}_+$), toate **numerele întregi negative** ($\mathbb{Z}_-$) la care se adaugă numărul 0, se numește **mulțimea numerelor întregi** și se notează cu $\mathbb{Z}$. Deci $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_+ = \{..., -n, ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ..., n, ...\}$.

• Orice număr întreg pozitiv se identifică cu un număr natural nenul, adică $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

• Orice număr natural este număr întreg, adică $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

• Două puncte situate pe o axă a numerelor, simetric față de originea axei, au coordonatele **numere întregi opuse**.

• Dacă a este un număr întreg nenul, numerele întregi a și $-a$ sunt **numere opuse**. Numărul a este opusul numărului $-a$, iar numărul $-a$ este opusul numărului a. Opusul numărului întreg 0 este el însuși, adică 0.

• Dacă a este număr pozitiv, atunci $-a$ este număr negativ, iar dacă a este număr negativ, atunci $-a$ este număr pozitiv.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Completați spațiile punctate cu răspunsul corect:

a) Orice număr natural este … .

b) Opusul unui număr întreg diferit de zero este … .

c) Axa numerelor este … .

2. Reprezentați pe axa numerelor următoarele numere întregi:

a) –5; +1; 0; –1; +2; –4;

b) –7; +4; –3; 0; +13; –2; +5;

c) –5; –3; 4; –7; 3; +5;

d) 50; –50; 30; –20; +20; 10; –10; 0.

3. Precizați care dintre numerele de mai jos sunt naturale și care sunt întregi:

a) –17; +3; 0; $\frac{4}{2}$; –13; 41;

b) –3; 0; 83; +15; + 43; –17.

4. Care dintre incluziunile următoare este corectă: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ sau $\mathbb{Z} \subset \mathbb{N}$?

Justificați. Dați exemple.

EDITURA PARALELA 45

PE **Nume** ____ **Clasa** _______

Test de autoevaluare

• *Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru 50 de minute.*

I. **Completați pe fișa de evaluare spațiile punctate cu răspunsul corect. (2 puncte)**

(0,5p) **1.** Numerele întregi mai mari decât -3 și mai mici decât $+2$ sunt ....

(0,5p) **2.** Numerele întregi negative mai mari sau egale cu -5 sunt ....

(0,5p) **3.** Cel mai mic număr întreg de două cifre este egal cu ....

(0,5p) **4.** Dacă numerele întregi negative a și b verifică relația $|a| < |b|$, atunci numărul mai mic dintre a și b este ....

II. **Încercuiți pe fișă doar răspunsul corect, știind că numai unul dintre cele patru răspunsuri este corect. (2 puncte)**

(0,5p) **1.** Câte numere întregi x verifică egalitatea $|x| = 2$?

A. niciunul; B. unul; C. două; D. cinci.

(0,5p) **2.** Câte numere întregi verifică egalitatea $|x| = -1$?

A. niciunul; B. unul; C. două; D. trei.

(0,5p) **3.** Elementele mulțimii $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq -2 \text{ și } x < 3\}$ sunt:

A. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$; B. $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$;
C. $\{-1, 0, 1, 2\}$; D. $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$.

(0,5p) **4.** Dacă $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 3\}$ și $B = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid |x| = -x\}$, atunci $A \cap B$ este:

A. $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$; B. $\{0, 1, 2, 3\}$;
C. $\{-3, -2, -1\}$; D. $\{-1, 0, 1\}$.

III. **Uniți prin săgeți fiecare enunț, aflat în coloana din stânga, cu răspunsul corespunzător, aflat în coloana din dreapta. (2 puncte)**

Se consideră mulțimea $A = \{-1, +2, -3, -(-1), -(+5)\}$. Determinați mulțimile:

(0,5p) a) $A \cap \mathbb{Z} = ...$	1) $\{-5, -3, -1, 1, 2\}$;
(0,5p) b) $A \cap \mathbb{N} = ...$	2) $\{-5, -3, -1\}$;
(0,5p) c) $A \setminus \mathbb{N} = ...$	3) $\mathbb{Z}$;
(0,5p) d) $A \cup \mathbb{Z} = ...$	4) $\{-3, -1, 1\}$;
	5) $\{1, 2\}$.

EDITURA PARALELA 45

La problemele IV și V scrieți pe fișa de evaluare rezolvările complete. **(3 puncte)**

(2p) **IV.** a) Determinați numerele $a, b \in \{-2, -1, 0, 1\}$ astfel încât numerele $2, 1, a, b, -2$ să fie așezate descrescător.

b) Determinați toate valorile posibile ale numerelor x și y, știind că $|x| = 2$, $|y| = 3$ și $x < y$.

(1p) **V.** Determinați cifra x astfel încât propoziția $-\overline{x3} > -45$ să fie adevărată.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	II.1	II.2	II.3	II.4	III.	IV.	V.
Punctajul											
Nota											

EDITURA PARALELA 45

Unitatea: Operaţii cu numere întregi (1)

PE-PP

1. Adunarea numerelor întregi. Scăderea numerelor întregi

Pe mulțimea numerelor întregi $\mathbb{Z}$ se definește o operație denumită **adunarea numerelor întregi**. Această operație se definește cu ajutorul operației de adunare a numerelor naturale astfel:

Se numește **suma a două numere întregi diferite de zero** un număr întreg care este:

- **suma modulelor** celor două numere întregi precedată de semnul „+”, dacă **cele două numere întregi sunt pozitive**;
- **suma modulelor** celor două numere întregi precedată de semnul „–”, dacă **cele două numere întregi sunt negative**;
- **diferența modulelor** celor două numere întregi precedată de semnul numărului cu modulul mai mare, dacă **cele două numere întregi au semne diferite și module diferite**;
- **numărul întreg 0**, dacă cele două numere întregi **au semne diferite și module egale**.

Se definește, de asemenea, **suma oricărui număr întreg *a* cu numărul întreg 0** și **suma numărului 0 cu orice număr întreg *a* ca fiind numărul întreg *a*.**

Operația prin care se obține suma a două numere întregi se numește **adunarea numerelor întregi**.

Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi se definește și **operația de scădere** astfel:

Dacă a și b sunt numere întregi, se consideră: $a - b = a + (-b)$, $\boldsymbol{a - b}$ numindu-se **diferența dintre *a* și *b***.

Deci, pentru a obține **diferența dintre numărul întreg *a* și numărul întreg *b*, se efectuează suma numărului întreg *a* cu opusul numărului întreg *b***.

Reţinem!

- Pentru orice două numere întregi a și b se definește numărul unic, notat $a + b$, numit **suma numerelor** a și b.
- Operația prin care fiecărei perechi de numere a și b se asociază suma acestora se numește **adunare**, iar numerele a și b sunt **termenii adunării**.
- Dacă $a \geq 0$ și $b \geq 0$, atunci $a + b \geq 0$ și $a + b = |a| + |b|$.
- Dacă $a \leq 0$ și $b \leq 0$, atunci $a + b \leq 0$ și $a + b = -(|a| + |b|)$.
- Dacă $a > 0$, $b < 0$ și $|a| > |b|$, atunci $a + b > 0$ și $a + b = |a| - |b|$.
- Dacă $a > 0$, $b < 0$ și $|a| < |b|$, atunci $a + b = -(|b| - |a|)$.
- Semnul sumei este același cu semnul termenului care are modulul mai mare.
- Pentru oricare două numere întregi a și b se definește **diferența** $a - b$ ca fiind suma dintre numărul a și opusul numărului b.
- Semnul „–” în fața unei paranteze schimbă toate semnele numerelor din paranteză.

EDITURA PARALELA 45

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Completați corect propozițiile:

a) Suma a două numere întregi pozitive este un număr întreg ....

b) Suma a două numere întregi negative este un număr întreg ....

c) Suma a două numere întregi .... este un număr întreg ...... sau un număr întreg ....

d) Dacă suma a două numere întregi este pozitivă, atunci numerele au semnul .... sau sunt de semne .... cu modulul mai mare al numărului întreg ....

e) Dacă suma a două numere întregi este negativă, atunci numerele au semnul .... sau sunt de semne .... cu modulul mai mare al numărului întreg ....

2. Calculați:

a) $(+5) + (+3)$; b) $(+4) + (-2)$; c) $(-6) + (-1)$; d) $(-6) + 0$;
e) $(-10) + (-30)$; f) $(-15) + (-5)$; g) $(+17) + (-10)$; h) $(+2) + (-1)$;
i) $(+7) + (-7)$; j) $(-7) + (+4)$; k) $(+15) + (-10)$; l) $(-20) + (+10)$.

3. Calculați:

a) $(+25) + (+10) + (+10)$; b) $(-32) + (-23) + (-15)$;
c) $(+15) + (-13) + (-3)$; d) $(-92) + (+32) + (+30)$;
e) $(-101) + (-102) + (-103) + (-104)$; f) $(-10) + (+13) + (-16) + (+19)$;
g) $(+21) + (-22) + (-23) + (+24)$; h) $(+12) + (-11) + (+9) + (+7)$.

4. Calculați:

a) $-9 + |-3| + 5$; b) $|+3| + (-7) + |-4|$; c) $|3 + 5| + (-10)$;
d) $-15 + |-7 + 12|$; e) $-3 + |-4 + 8| + |-3 + 5|$; f) $-25 + |-12 + 70 - 8|$.

5. Completați tabelele:

a)

a	–17	+2	0	–2	+5	–4	+3	–5	+11	–13	+6
$a + (-5)$											

b)

+	+1	+3	–4	+5	0	+7	–3	+8	–11	+2	–6
+1											
–4											
0											
–3											

6. Efectuați:

a) $-31 - 0$; b) $0 - (-37)$; c) $19 - 0$; d) $0 - (+25)$;
e) $6 - (-6)$; f) $-6 - (+6)$; g) $-6 - (-6)$; h) $6 - (+6)$;
i) $18 - (+5)$; j) $-50 - (+17)$; k) $-200 - (-125)$; l) $-104 - (+56)$.

7. Care număr întreg este egal cu opusul său?

8. Completați propozițiile:

a) „Dacă a și b sunt numere întregi și …, atunci $a - c = b - c$.” Dați 3 exemple.

b) „Dacă $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ și $a = b$, $c = d$, atunci … .” Dați 3 exemple.

9. Scădeți 23 din ambii membri ai egalității: $43 = 60 - 17$.

EDITURA PARALELA 45

Unitatea: Operaţii cu numere întregi (2)

PE-PP 1. Înmulţirea numerelor întregi. Proprietăţi

Produsul a două numere întregi *a* și *b* este **un număr întreg notat cu *a* · *b*** obținut astfel:

a) dacă $a = 0$ sau $b = 0$, atunci $\boldsymbol{a \cdot b = 0}$;

b) dacă $a > 0$ și $b > 0$ sau $a < 0$ și $b < 0$, atunci $\boldsymbol{a \cdot b = |a| \cdot |b|}$;

c) dacă $a > 0$ și $b < 0$ sau $a < 0$ și $b > 0$, atunci $\boldsymbol{a \cdot b = -|a| \cdot |b|}$.

Numerele a și b se numesc **factorii produsului**.

Exemple:

a) $0 \cdot (-2) = 0$; $(-7) \cdot 0 = 0$; $(+5) \cdot 0 = 0$; $0 \cdot (+3) = 0$;

b) $(+2) \cdot (+5) = |+2| \cdot |+5| = 2 \cdot 5 = 10$; $(-2) \cdot (-5) = |-2| \cdot |-5| = 2 \cdot 5 = 10$;

c) $(+2) \cdot (-5) = -|+2| \cdot |-5| = -2 \cdot 5 = -10$; $(-2) \cdot (+5) = -|-2| \cdot |+5| = -2 \cdot 5 = -10$.

Din definiția produsului a două numere întregi rezultă următoarele **reguli de calcul**:

1. **Oricare ar fi numărul întreg *a***, avem: $\boldsymbol{a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0}$.
2. **Oricare ar fi numărul întreg *a***, avem: $\boldsymbol{a \cdot (-1) = (-1) \cdot a = -a}$.
3. **(Regula semnelor) Oricare ar fi numerele întregi *a* și *b***, avem:

$$\boldsymbol{(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -a \cdot b;\quad (-a) \cdot (-b) = a \cdot b.}$$

Reţinem!

- Operația prin care se obține produsul a două numere întregi se numește **înmulțire**.
- Înmulțirea numerelor întregi are următoarele proprietăți:

– este **comutativă**, adică oricare ar fi $a, b \in \mathbb{Z}$ avem: $\boldsymbol{a \cdot b = b \cdot a}$;

– este **asociativă**, adică oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{Z}$ avem: $\boldsymbol{(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)}$;

– este **distributivă** față de adunare și scădere, adică oricare ar fi a, b și $c \in \mathbb{Z}$ avem:

$$\boldsymbol{a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c;\ a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c;}$$

– numărul întreg 1 este **element neutru** la înmulțirea numerelor întregi, adică oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}$ avem: $\boldsymbol{1 \cdot a = a \cdot 1 = a}$.

Observaţii:

Utile în aplicații sunt următoarele **proprietăți**:

- Oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{Z}$, **dacă** $\boldsymbol{a = b}$**, atunci** $\boldsymbol{a \cdot c = b \cdot c}$.
- Oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{Z}$, **dacă** $\boldsymbol{c \neq 0}$ **și** $\boldsymbol{a \cdot c = b \cdot c}$**, atunci** $\boldsymbol{a = b}$.
- Oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{Z}$, **dacă** $\boldsymbol{a = b}$ **și** $\boldsymbol{c = d}$**, atunci** $\boldsymbol{a \cdot c = b \cdot d}$.
- **Dacă într-un produs de numere întregi numărul factorilor negativi este impar**, atunci **produsul este negativ**, iar **dacă numărul factorilor negativi este par**, atunci **produsul este pozitiv**.
- Regula de folosire a parantezelor la numere întregi este aceeași ca cea de la numere naturale.

EDITURA PARALELA 45

• La fel ca în mulțimea numerelor naturale, în mulțimea numerelor întregi, **înmulțirea este operație de ordinul al doilea**.

• Într-un șir de operații cu numere întregi, operațiile de ordinul al doilea se efectuează înaintea operațiilor de ordinul întâi.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Completați corect propozițiile.

a) Produsul a două numere întregi pozitive este un număr întreg … .
b) Produsul a două numere întregi negative este un număr întreg … .
c) Produsul a două numere întregi de semne contrare este un număr întreg … .

2. Completați tabelul următor:

a	–15	43	104	23	–196	–34	0	–2011
b	–8	–50	–70	105	0	–86	–2010	–1
a · b								

3. Efectuați:

a) (–2) · (–5); b) (–7) · (+3); c) 18 · (–1);
d) 9 · (+3); e) –11 · (+4); f) –73 · (0);
g) –41 · (+2); h) –10 · (213); i) –4 · (–102);
j) –33 · (+10); k) 18 · (–5); l) 0 · (–19).

4. Completați tabelul:

·	–2	+5	0	–4	+3	–10	+11	–6	+10	–5
–3										
0										
+4										

5. Completați propozițiile:

a) Produsul a două numere întregi … este un număr întreg pozitiv.
b) Produsul a două numere întregi … este un număr întreg negativ.
c) Produsul dintre un număr întreg și zero este … .
d) Produsul a două numere întregi este zero, dacă cel puțin … .

6. Efectuați operațiile din tabel și puneți rezultatul în linia $\mathbb{N}$ sau $\mathbb{Z}$, după cum rezultatul este număr natural sau întreg:

Operația	14 · (–5)	28 · (+9)	(–2) · 31	(–131) · 10	0 · (–97)	(–13) · (–1)	(–7) · (+1)	203 · (–1)
$\mathbb{N}$								
$\mathbb{Z}$								

7. Produsul a trei numere întregi este un număr negativ. Câți factori pot fi negativi?

8. Calculați în două moduri:

a) 3 · (5 – 7); b) –3 · (–4 + 9);
c) (–5) · 6 + (–5) · 10; d) (–6) · [8 – (–3)];
e) (+2) · (–4 + 6); f) (–2) · (+3 – 8);
g) (–7) · (–1) + (–7) · (–5); h) (–8) · [(–6) + (–4)].

EDITURA PARALELA 45

Unitatea: Operaţii cu numere întregi (3)

PE-PP

1. Puterea unui număr întreg cu exponent număr natural. Reguli de calcul cu puteri

Dacă a este un număr întreg şi n este un număr natural, $n \geq 2$, atunci **puterea n a lui a** este: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n \text{ factori}}$, a se numeşte **bază**, iar n se numeşte **exponent**.

Prin definiţie, $a^1 = a$, iar dacă a este diferit de zero, atunci $a^0 = 1$.

Nu se defineşte 0^0, se mai spune că **0^0 nu are sens**.

PROPRIETĂŢI:

1. Dacă baza este un număr pozitiv, puterea este un număr pozitiv oricare ar fi exponentul.

2. Dacă baza este un număr negativ şi exponentul este număr par, atunci puterea este un număr pozitiv.

3. Dacă baza este un număr negativ şi exponentul este număr impar, atunci puterea este un număr negativ.

$$(+a)^n = +a^n = a^n \quad \text{şi} \quad (-a)^n = \begin{cases} a^n, \text{ pentru } n = 2k, k \in \mathbb{N} \\ -a^n, \text{ pentru } n = 2k+1, k \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Exemple:

$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$; $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$;
$-2^4 = -2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = -16$; $(+5)^3 = (+5) \cdot (+5) \cdot (+5) = 125$; $(+11)^2 = 121$.

Reţinem!

Dacă a şi b sunt două numere întregi, m şi n sunt două numere naturale, iar operațiile care trebuie efectuate sunt definite (au sens), atunci avem:

1. Produsul a două puteri care au aceeaşi bază: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

2. Câtul a două puteri care au aceeaşi bază: $a^m : a^n = a^{m-n}$.

3. Puterea unei puteri: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

4. Puterea unui produs: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

5. Puterea unui cât: $(a : b)^m = a^m : b^m$.

Exemple pentru aplicarea regulilor de calcul cu puteri:

1. $(-3)^2 \cdot (-3)^3 = (-3)^{2+3} = (-3)^5$; $\quad 17^5 \cdot 17^{11} = 17^{5+11} = 17^{16}$;
$31^9 \cdot 31 = 31^{9+1} = 31^{10}$; $\quad (-4)^6 \cdot (-4)^3 \cdot (-4) = (-4)^{6+3+1} = (-4)^{10}$.

2. $11^5 : 11^3 = 11^{5-3} = 11^2$; $\quad (-6)^8 : (-6)^4 = (-6)^{8-4} = (-6)^4$.

3. $(5^7)^2 = 5^{7 \cdot 2} = 5^{14}$; $\quad [(-13)^{11}]^3 = (-13)^{11 \cdot 3} = (-13)^{33}$;
$(+9)^4 = [(+3)^2]^4 = (+3)^{2 \cdot 4} = (+3)^8$; $\quad (-4)^3 = (-2^2)^3 = -2^{2 \cdot 3} = -2^6$.

EDITURA PARALELA 45

4. $[(-3)\cdot(-2)]^5 = (-3)^5\cdot(-2)^5$; $[(+2)\cdot(-5)]^3 = (+2)^3\cdot(-5)^3$;
$[(-3)\cdot(+5)]^3 = (-3)^3\cdot(+5)^3$; $[(+2)\cdot(+3)]^3 = (+2)^3\cdot(+3)^3$.

5. $[(-6) : (-3)]^3 = (-6)^3 : (-3)^3$; $[(-2) : (+1)]^7 = (-2)^7 : (+1)^7$;
$[(+10) : (-5)]^2 = (+10)^2 : (-5)^2$; $[(+6) : (+2)]^3 = (+6)^3 : (+2)^3$.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Efectuați:
a) 1^5; b) $(-1)^5$; c) $(-1)^6$; d) -1^6; e) $(+1)^6$;
f) $+1^6$; g) $(-1)^{100}$; h) $(-1)^{33}$; i) 1^{13}; j) $(+1)^{33}$;
k) -1^7; l) $(-1)^7$; m) $(-1)^{103}$; n) $(-1)^{88}$; o) $(+1)^{12}$.

2. Completați tabelul:

n	n^0	n^1	n^2	n^3	n^4	n^5
1						
–1						
+3						
–3						

3. Calculați:
a) $(-2)^4$ și -2^4; b) $(-1)^3$ și -1^3; c) $(-7)^2$ și -7^2;
d) $(-12)^2$ și -12^2; e) $(-6)^0$ și -6^0; f) $(+3)^3$ și $+3^3$.

4. Efectuați:
a) 0^4; b) $(-15)^1$; c) $(+3)^1$; d) 0^2; e) 0^{18};
f) $(-7)^1$; g) $(+13)^1$; h) 0^{11}; i) $(-3)^0$; j) $(-5)^1$;
k) $(+6)^0$; l) 0^{33}; m) 33^0; n) 1^{33}; o) 33^1;
p) $(-33)^1$; r) $(-33)^0$; s) $(-1)^{11}$.

5. Efectuați:
a) 2^3; b) $(-2)^3$; c) $(-2)^1$; d) 2^0; e) $(-2)^0$;
f) $+2^1$; g) 3^2; h) $(-3)^2$; i) -3^2, și apoi adunați rezultatele găsite.

6. a) Determinați numerele întregi a căror putere a doua este 4.
b) Determinați numerele întregi a căror putere a treia este –4.
c) Determinați numerele întregi a căror putere a treia este –8.
d) Determinați numerele întregi care la puterea n dau 1.
e) Determinați numerele întregi care la puterea n dau –1.

7. Completați căsuțele astfel încât egalitățile să fie adevărate:
a) $(\square)^2 = +16$; b) $(\square)^3 = -27$; c) $(\square)^3 = 125$;
d) $(\square)^1 = -7$; e) $(\square)^0 = 1$; f) $(\square)^4 = +81$.

8. Fie $a \in \mathbb{Z}^*$, m, n numere naturale. Înlocuiți spațiile punctate astfel încât următoarele propoziții să fie adevărate:
a) $a^0 = \ldots$; b) $a^1 = \ldots$; c) $a^m \cdot a^n = \ldots$; d) $a^{m+n} = \ldots$;
e) $a^m : a^n = \ldots$; f) $a^{m-n} = \ldots$; g) $(a^m)^n = \ldots$; h) $a^{m\cdot n} = \ldots$.

EDITURA PARALELA 45

Unitatea: Ecuaţii, inecuaţii, probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuaţiilor sau inecuaţiilor în mulţimea numerelor întregi

PE-PP 1. Ecuaţii în mulţimea numerelor întregi

Fie a și b două numere întregi. Se formulează următoarea **problemă**:
Determinați numerele întregi x pentru care $ax + b = 0$.

De obicei, această problemă se formulează mai scurt astfel:
Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația: $ax + b = 0$, unde a și $b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$.

Un număr întreg x_0, pentru care $ax_0 + b = 0$, se numește **soluție** a ecuației.
A rezolva ecuația înseamnă **a găsi mulțimea soluțiilor ei** care se notează cu S.
Două ecuații se numesc **ecuații echivalente** dacă **au aceeași mulțime de soluții**.

1. Rezolvarea în $\mathbb{Z}$ a ecuației $ax + b = 0$ ($a \in \mathbb{Z}^*$, $b \in \mathbb{Z}$)

- adunăm în ambii membri ai ecuației numărul $-b$ și obținem ecuația echivalentă:
$$ax + b - b = -b, \text{ adică } ax = -b.$$
Se spune că **am separat termenul cunoscut b de termenul necunoscut ax**, prin trecerea termenului cunoscut b în partea dreaptă a egalității cu semn schimbat.
- împărțim ambii membri ai ecuației $ax = -b$ cu $a \neq 0$;
  – dacă $(-b) : a$ este numărul întreg k, atunci ecuația are soluții în mulțimea numerelor întregi și $S = \{k\}$.
  – dacă $(-b) : a$ nu este număr întreg, atunci ecuația nu are soluții în mulțimea numerelor întregi, deci $S = \varnothing$.

2. Rezolvarea în $\mathbb{Z}$ a ecuației $ax + b = c$ ($a \in \mathbb{Z}^*$, $b, c \in \mathbb{Z}$)

- adunăm în ambii membri ai ecuației numărul $-b$ și obținem ecuația echivalentă:
$$ax + b - b = c - b, \text{ adică } ax = c - b;$$
- împărțim ambii membri ai ecuației cu $a \neq 0$ și obținem: $x = \dfrac{c-b}{a}$;

  – dacă $\dfrac{c-b}{a} = k$ și k este număr întreg, ecuația are soluții în mulțimea numerelor întregi și $S = \{k\}$;
  – dacă $\dfrac{c-b}{a}$ nu este număr întreg, atunci ecuația nu are soluții în mulțimea numerelor întregi, deci $S = \varnothing$.

PE Exerciţii rezolvate:

Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuațiile:

1. a) $3x + 9 = 0 \mid +(-9) \Leftrightarrow 3x = -9 \mid :(3) \Leftrightarrow x = -3$ și $-3 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow S = \{-3\}$;

b) $-7x + 3 = 0 \mid +(-3) \Leftrightarrow -7x = -3 \mid :(-7) \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{7}$ și $\dfrac{3}{7} \notin \mathbb{Z} \Leftrightarrow S = \varnothing$.

EDITURA PARALELA 45

2. a) $-2x+7=11 \mid +(-7) \Leftrightarrow -2x=4 \mid :(-2) \Leftrightarrow x=-2$ și $-2 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow S=\{-2\}$;

b) $5x-7=12 \mid +7 \Leftrightarrow 5x=19 \mid :5 \Leftrightarrow x=\frac{19}{5}$ și $\frac{19}{5} \notin \mathbb{Z} \Leftrightarrow S=\varnothing$.

Observație: Utilizând regulile de calcul din $\mathbb{Z}$ și separarea termenilor cunoscuți de termenii necunoscuți, anumite ecuații se aduc la forma echivalentă: $ax = b$, a cărei rezolvare în mulțimea $\mathbb{Z}$ este imediată:

- prin împărțirea cu $a \neq 0$ se obține: $x=\frac{b}{a}$.
  - dacă $\frac{b}{a}=k$ și k este număr întreg, atunci $S=\{k\}$;
  - dacă $\frac{b}{a}$ nu este număr întreg, atunci $S=\varnothing$.

Exemplu: Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația $6 = 4(x + 1) - 2(x - 2)$.

Rezolvare:
- desființăm parantezele și obținem ecuația echivalentă: $6 = 4x + 4 - 2x + 4$;
- efectuăm calculele în membrul drept, grupând convenabil termenii: $6 = (4x - 2x) + (4 + 4)$ și obținem: $6 = 2x + 8$;
- separăm termenul necunoscut $2x$ de termenii 6 și 8 prin trecerea lui 8 în stânga egalității cu semn schimbat: $6 - 8 = 2x$, adică $-2 = 2x$ sau $2x = -2$;
- împărțim la 2 ambii membri ai egalității și obținem: $\frac{-2}{2}=x$, adică $x=-1$ și $S=\{-1\}$.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Completați spațiile punctate:

a) A rezolva o ecuație înseamnă … .

b) Un număr întreg m este soluție a ecuației $ax + b = 0$, unde $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, dacă … .

c) Două ecuații se numesc echivalente dacă … .

2. Verificați dacă -1 este soluție pentru ecuațiile:

a) $3x + 5 = 2$; b) $-2x + 3 = 5$; c) $-x + 3x + 5 = 3$.

3. Rezolvați ecuația: $2x - 1 = -3$, în mulțimea $A = \{-3, -2, -1, 2\}$.

4. Rezolvați ecuația: $-3x + 1 = -8$, în mulțimea $B = \{-1, 0, 1, 3\}$.

5. Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuațiile:

a) $7x - 14 = 0$; b) $4x + 12 = 0$; c) $-9x + 27 = 0$; d) $-4x - 36 = 0$;
e) $2x + 4 = -10$; f) $10 = 7x - 4$; g) $6 = 4x - 2$; h) $-7 = 4x + 1$;
i) $11 = 2x + 3$; j) $5x - 6 = 14$; k) $5x - 1 = 9$; l) $-4x + 1 = -15$;
m) $5x + 17 = 2$; n) $-6x + 4 = -8$; o) $8x + 6 = -2$; p) $5x = 4x + 1$.

6. Reprezentați fiecare dintre elementele următoarelor mulțimi, scriind elementele lor între acolade:

$A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 3x = 6\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -7x = 0\}$;

$C = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -2x = 10\}$; $D = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -x - 5 = 0\}$;

EDITURA PARALELA 45

AUTOEVALUARE

Citiți cu atenție afirmațiile de mai jos și acordați un calificativ: **insuficient** (**I**), **suficient** (**S**), **bine** (**B**) sau **foarte bine** (**FB**) pentru a vă evalua parcursul de învățare din conținuturile studiate.

AFIRMAȚII	FB	B	S	I
1. Știți să identificați numerele întregi în situații practice sau interdisciplinare (temperatură, altitudine, debit/credit, golaveraje).				
2. Știți să reprezentați numerele întregi pe axa numerelor utilizând și noțiunile de opus și modul.				
3. Știți să comparați numerele întregi pornind de la reprezentarea acestora pe axa numerelor.				
4. Știți să ordonați elementele unei mulțimi finite de numere întregi.				
5. Știți să utilizați regulile specifice pentru efectuarea operațiilor cu numere întregi: adunare, scădere, înmulțire, împărțire, ridicare la putere.				
6. Știți să validați, prin probă, soluția unei ecuații sau inecuații cu coeficienți numere întregi.				
7. Știți să transpuneți o problemă într-o ecuație/inecuație care se rezolvă în mulțimea numerelor întregi.				
8. Știți să utilizați metoda de determinare a unei necunoscute dintr-o ecuație (metoda mersului invers, metoda balanței, transformări ale relațiilor de egalitate).				
9. Știți să utilizați metoda de determinare a unei necunoscute dintr-o inecuație (metoda mersului invers, metoda balanței, transformări ale relațiilor de inegalitate.				
10. Știți să formulați probleme cu numere întregi pe baza unei scheme date sau a unui exercițiu dat.				
11. Știți că modulul unui număr reprezintă distanța pe axa numerelor de la origine la reprezentarea numărului.				
12. Știți să exprimați caracteristicile modulului unui număr întreg, derivate din definiția acestuia ($\|x\| = a$, $\|x\| < a$, $\|x\| \leq a$, unde a și x sunt numere întregi).				

EDITURA PARALELA 45

Capitolul
Mulțimea numerelor raționale

PP Competenţe specifice şi exemple de activităţi de învăţare

1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

1.4. Recunoaşterea fracţiilor echivalente, a fracţiilor ireductibile şi a formelor de scriere a unui număr rațional
- *Identificarea unui număr rațional în situații practice sau interdisciplinare (de exemplu: temperatura corpului, înălțimea unei persoane, prețul unui produs)*
- *Reprezentarea numerelor raționale pe axa numerelor, utilizând și noțiunile: opus și modul*

2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

2.4. Aplicarea regulilor de calcul cu numere raționale pentru rezolvarea ecuațiilor de tipul: $x + a = b$, $x \cdot a = b$, $x : a = b$ $(a \neq 0)$, $ax + b = c$, **unde** a, b **și** c **sunt numere raționale**
- *Utilizarea regulilor specifice pentru efectuarea operațiilor cu numere raționale: adunare, scădere, înmulțire, împărțire (calcule ce implică maximum două operații)*
- *Estimarea rezultatului unui calcul înainte de efectuarea lui (cu scopul dezvoltării abilităților de calcul mintal în contexte practice, cotidiene, de exemplu: cumpărături, cantități necesare, cantități suficiente)*
- *Validarea (prin probă) a soluției unei ecuații cu coeficienți numere raționale*
- *Rezolvarea de ecuații utilizând regulile de calcul studiate*

3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

3.4. Utilizarea proprietăților operațiilor pentru compararea și efectuarea calculelor cu numere raționale
- *Compararea numerelor raționale, inclusiv poziționarea numerelor pe axa numerelor*
- *Ordonarea elementelor unei mulțimi finite de numere raționale*
- *Utilizarea de proprietăți ale operațiilor cu numere raționale pentru optimizarea calculelor numerice*
- *Utilizarea regulilor de calcul cu puteri (calcule numerice)*
- *Determinarea unei necunoscute dintr-o ecuație (metoda mersului invers, metoda balanței, transformări ale relațiilor de egalitate)*

4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, a concluziilor și a demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

4.4. Redactarea etapelor de rezolvare a unor probleme, folosind operații în mulțimea numerelor raționale
- *Formularea unor răspunsuri logice în raport cu cerințe de calcul numeric (corelații intradisciplinare; de exemplu: apartenența rezultatului unui calcul la o mulțime, estimarea rezultatului)*
- *Transpunerea unei probleme într-o ecuație care se rezolvă în mulțimea numerelor raționale*
- *Redactarea demersului de rezolvare și validarea soluțiilor (prin probă) în cazul problemelor cu conținut practic*

EDITURA PARALELA 45

5. **Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date**
   5.4. Determinarea unor metode eficiente în efectuarea calculelor cu numere raționale
   - *Analizarea unor situații practice în care se utilizează numere raționale*
   - *Analizarea și alegerea metodei optime de efectuare a calculului numeric prin utilizarea de proprietăți ale operațiilor studiate*
   - *Interpretarea răspunsurilor obținute prin rezolvarea de ecuații și identificarea mulțimii soluțiilor*

6. **Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii**
   6.4. Interpretarea matematică a unor probleme practice prin utilizarea operațiilor cu numere raționale
   - *Împărțirea unei cantități în părți direct sau invers proporționale cu mai multe numere date*
   - *Interpretarea matematică a unei proporționalități referitoare la segmente (de exemplu, interpretarea regulilor din șirul lui Fibonacci în construcții geometrice cu segmente, pătrate și dreptunghiuri)*
   - *Transpunerea, în limbaj matematic, a unei situații date, utilizând ecuații în contextul numerelor raționale*
   - *Formularea de probleme cu numere raționale pe baza unei scheme date sau a unui exercițiu dat*

Unitatea: Mulţimea numerelor raţionale. Reprezentare pe axa numerelor. Comparare şi ordonare

PE-PP 1. Mulţimea numerelor raţionale. Număr raţional.

Definiţie: **Prin număr rațional înțelegem orice pereche de numere întregi (a, b), unde $b \neq 0$, scrisă sub formă de fracție $\frac{a}{b}$.**

Exemple: $\frac{1}{2}, \frac{4}{17}, \frac{11}{35}, \frac{-4}{5}, \frac{7}{-19}, \frac{-31}{-69}$ sunt numere raționale.

Observaţii:

- **Mulțimea numerelor raționale** se notează cu $\mathbb{Q}$ și $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$.

- **Numerele întregi sunt numere raționale.** În particular, **numerele naturale sunt numere raționale**. Într-adevăr, dacă a este număr întreg (în particular număr natural), atunci $a = a : 1 = \frac{a}{1}$ și $\frac{a}{1} \in \mathbb{Q}$.

Prin urmare, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

EDITURA PARALELA 45

Exemple:

a) Numerele naturale 0, 1, 2, 3, ... sunt numere raționale deoarece $0 = 0 : 1 = \frac{0}{1}$ și $\frac{0}{1} \in \mathbb{Q}$, $1 = 1 : 1 = \frac{1}{1}$ și $\frac{1}{1} \in \mathbb{Q}$, $2 = 2 : 1 = \frac{2}{1}$ și $\frac{2}{1} \in \mathbb{Q}$, ...

b) Numerele întregi –1, –2, –3, ... sunt numere raționale deoarece $-1 = -1 : 1 = \frac{-1}{1}$ și $\frac{-1}{1} \in \mathbb{Q}$, $-2 = -2 : 1 = \frac{-2}{1}$ și $\frac{-2}{1} \in \mathbb{Q}$, ...

- Două numere raționale $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$ sunt **numere raționale egale**, adică $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, dacă $a \cdot d = b \cdot c$. În acest context, se mai spune că $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$ reprezintă **același** număr rațional.

Exemple:

a) Numerele raționale $\frac{1}{2}$ și $\frac{-3}{-6}$ sunt egale și notăm $\frac{1}{2} = \frac{-3}{-6}$, deoarece $1 \cdot (-6) = 2 \cdot (-3)$.

b) Oricare două dintre numerele raționale $\frac{1}{2}, \frac{4}{8}, \frac{-8}{-16}, \frac{-3}{-6}$ sunt egale și, ca urmare, spunem că fracțiile $\frac{1}{2}, \frac{4}{8}, \frac{-8}{-16}, \frac{-3}{-6}$ reprezintă același număr rațional și notăm $\frac{1}{2} = \frac{4}{8} = \frac{-8}{-16} = \frac{-3}{-6}$.

- **Orice număr rațional se poate reprezenta sub formă de fracție ordinară ireductibilă** de forma $\frac{a}{b}$ sau $-\frac{a}{b}$, unde $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ și $b \neq 0$.

Exemple: $\frac{-9}{15} = -\frac{3}{5}$; $\frac{18}{-21} = -\frac{6}{7}$; $\frac{-6}{-10} = \frac{3}{5}$.

- Numerele raționale de forma $\frac{a}{b}$, unde $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$ și $b \neq 0$, le numim **numerele raționale pozitive**, iar numerele raționale de forma $-\frac{a}{b}$, unde $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$ și $b \neq 0$, le numim **numere raționale negative**. Notăm cu $\mathbb{Q}_+$ **mulțimea numerelor raționale pozitive** și cu $\mathbb{Q}_-$ mulțimea numerelor raționale negative, adică:
$\mathbb{Q}_+ = \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{N}, a \neq 0, b \neq 0\right\}$ și $\mathbb{Q}_- = \left\{-\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{N}, a \neq 0, b \neq 0\right\}$.

Exemple:

a) $2, 43, 87, \frac{3}{5}, \frac{9}{6}, \frac{7}{11}, \frac{2}{13}$ sunt numere raționale pozitive;

b) $\frac{-1}{-7}, \frac{-12}{-36}, \frac{-48}{-16}$ sunt numere raționale pozitive, deoarece $\frac{-1}{-7} = \frac{1}{7}$, $\frac{-12}{-36} = \frac{1}{3}$, $\frac{-48}{-16} = 3$;

c) $-5, -11, -\frac{16}{4}, -\frac{17}{23}, -\frac{24}{15}$ sunt numere raționale negative;

EDITURA PARALELA 45

Unitatea: Operaţii cu numere raţionale

PE-PP

1. Adunarea şi scăderea numerelor raţionale. Proprietăţi

Adunarea numerelor raționale este operația prin care oricărei perechi de numere raționale *a* și *b*, i se asociază numărul rațional notat $a + b$.

Observaţii:

- Numărul rațional $a + b$ se numește **suma numerelor** *a* și *b*.
- Numerele *a* și *b* sunt termenii sumei $a + b$.
- Termenii unei sume pot fi reprezentați prin fracții ordinare sau fracții zecimale.

Suma a două numere raționale diferite de zero este:

- **suma modulelor celor două numere raționale** precedată de semnul „+”, dacă **cele două numere raționale sunt pozitive**;
- **suma modulelor celor două numere raționale** precedată de semnul „–”, dacă **cele două numere raționale sunt negative**;
- **diferența modulelor celor două numere raționale** precedată de semnul numărului cu modulul mai mare, dacă **cele două numere raționale au semne diferite și module diferite**;
- **numărul întreg 0**, dacă **cele două numere raționale au semne diferite și module egale**.

Se definește, de asemenea, **suma oricărui număr rațional *a* cu numărul rațional 0** și **suma numărului rațional 0 cu orice număr rațional *a* ca fiind numărul rațional *a***.

Scăderea numerelor raționale este operația prin care oricărei perechi de numere raționale *a* și *b* i se asociază numărul rațional notat $a - b$.

Observaţii:

- Numărul rațional $a - b$ se numește **diferența numerelor** *a* și *b*.
- Diferența a două numere raționale *a* și *b* se definește ca **suma dintre numărul rațional *a* și opusul numărului rațional *b***, adică:

$$a - b = a + (-b).$$

- Deoarece $-(-b) = b$, avem că $a - (-b) = a + b$, pentru orice numere raționale *a* și *b*;
- În mulțimea numerelor raționale, orice diferență este posibilă.

Deoarece operațiile de adunare și scădere a numerelor raționale se reduc la operații cu numere întregi, **proprietățile adunării numerelor raționale** sunt aceleași cu proprietățile adunării numerelor întregi:

- adunarea numerelor raționale este **comutativă:** $a + b = b + a$, oricare ar fi numerele raționale *a* și *b*;
- adunarea numerelor raționale este **asociativă:** $(a + b) + c = a + (b + c)$, oricare ar fi numerele raționale *a*, *b* și *c*;
- numărul rațional 0 este **element neutru** la adunarea numerelor raționale: $a + 0 = 0 + a$, oricare ar fi numărul rațional *a*;
- orice număr rațional *a* are un **opus** notat $-a$, astfel încât: $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

EDITURA PARALELA 45

Observații:

- Opusul numărului rațional $-a$ este numărul rațional $-(-a) = a$.
- Definiția opusului unui număr rațional, a diferenței a două numere raționale și proprietatea de asociativitate permit simplificarea scrierii prin eliminarea unor paranteze:

a) $-(-a) = a$; b) $a - b = a + (-b)$;
c) $a + (b + c) = a + b + c$; d) $(a + b) + c = a + b + c$.

- Dacă într-un exercițiu, o paranteză este precedată de semnul „+” se renunță la paranteză prin scrierea termenilor din interiorul parantezei cu semnele lor.
- Dacă într-un exercițiu, o paranteză este precedată de semnul „–” se renunță la paranteză prin scrierea termenilor din interiorul parantezei cu semne schimbate.
- Utile în calcule mai sunt:

a) **adunarea unui termen la o egalitate** „dacă $a = b$, atunci $a + c = b + c$, oricare ar fi a, b și c numere raționale”;

b) **reducerea unui termen dintr-o egalitate** „ dacă $a + c = b + c$, atunci $a = b$, oricare ar fi a, b și c numere raționale”;

c) **adunarea a două egalități** „dacă $a = b$ și $c = d$, atunci $a + c = b + d$, oricare ar fi a, b, c și d numere raționale”.

- La fel ca și în mulțimea numerelor întregi, în mulțimea numerelor raționale, adunarea și scăderea sunt operații de ordinul întâi.

Reținem!

- **Adunarea numerelor raționale** se definește pe baza adunării numerelor raționale pozitive și a adunării numerelor întregi.
- Operația de adunare a numerelor raționale păstrează **proprietățile adunării numerelor întregi**.
- În mulțimea numerelor raționale, orice diferență este posibilă.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Efectuați calculele:

a) $\frac{2}{7}+\frac{5}{7}$; b) $\frac{3}{11}+\frac{6}{11}+\frac{2}{11}$; c) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$;

d) $\frac{8}{13}-\frac{9}{13}+\frac{1}{13}$; e) $\frac{5}{6}-\frac{1}{4}-\frac{5}{12}$; f) $\frac{1}{12}+\frac{5}{6}-\frac{3}{4}$.

2. Calculați:

a) $17{,}2 + 1{,}56 - 14{,}4$; b) $4{,}8 - 1{,}3 + 15{,}9$; c) $1{,}7 - 2{,}(3) - 0{,}(6)$;

d) $\frac{1}{3} - 2{,}5 + 1{,}1(6)$; e) $3 - 1{,}(3) + \frac{1}{6}$; f) $-2{,}(3) + \frac{16}{3} - 6{,}(6)$.

3. Efectuați:

a) $\frac{1}{3}-\frac{3}{4}+\frac{5}{6}$; b) $\frac{3}{5}-\frac{4}{15}+\frac{2}{3}$; c) $-\frac{1}{2}+\frac{7}{3}-\frac{5}{6}$;

d) $\frac{5}{8}-\frac{1}{3}+\frac{7}{6}$; e) $\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$; f) $\frac{2}{3}+\frac{5}{4}-\frac{17}{12}$.

EDITURA PARALELA 45

4. Calculați:

a) $\frac{1}{3}-\frac{2}{3}$; b) $-\frac{1}{3}+\left(-\frac{2}{3}\right)$; c) $-\frac{1}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)$;

d) $\frac{1}{5}+\left(-\frac{3}{15}\right)$; e) $-\frac{1}{2}+\left(-\frac{3}{8}\right)$; f) $-\frac{1}{5}-\left(-\frac{7}{10}\right)$.

5. Efectuați calculele:

a) $\frac{1}{5}+\left(-\frac{1}{5}\right)$; b) $-\frac{7}{3}-\left(+\frac{5}{3}\right)$; c) $\frac{11}{4}-\left(-\frac{1}{4}\right)$;

d) $+\frac{1}{3}-\left(+\frac{4}{3}\right)$; e) $-\frac{2}{5}-\left(-\frac{7}{5}\right)$; f) $\frac{4}{3}+\left(-\frac{1}{3}\right)$.

6. Efectuați:

a) $\frac{2}{3}+\left(-\frac{7}{5}\right)-\left(-\frac{1}{15}\right)$; b) $-\frac{1}{7}+\left(-\frac{3}{14}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)$;

c) $\frac{5}{8}+\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{3}{4}\right)$; d) $\frac{1}{6}-\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{5}{12}-\left(+\frac{7}{3}\right)$.

7. Efectuați:

a) $0{,}2-(+5{,}3)-(-4{,}1)$; b) $3{,}5+2+(-10{,}6)+(+0{,}4)$;

c) $-2{,}(3)+1\frac{1}{3}-(-1)$; d) $6{,}1+[-1{,}(6)]-4{,}1+\left(+\frac{2}{3}\right)$.

8. Efectuați:

a) $2\frac{1}{3}+3\frac{1}{2}-5\frac{1}{6}$; b) $4\frac{1}{4}+\frac{1}{12}-\frac{5}{6}$; c) $5\frac{1}{5}-\frac{3}{20}+2\frac{3}{4}$;

d) $2\frac{1}{4}+1\frac{3}{7}-3\frac{5}{28}$; e) $1\frac{7}{15}-4\frac{17}{60}+1\frac{3}{4}$; f) $7-1\frac{1}{6}-2\frac{1}{4}$.

9. Folosind proprietățile modulului calculați:

a) $|-1{,}4|+\left|-1+\frac{2}{5}\right|$; b) $-|2{,}7-3{,}5|+|4{,}1-0{,}36|$;

c) $\left|1-\frac{1}{3}\right|+\left|\frac{-5}{12}+\frac{3}{4}\right|$; d) $\left|+1{,}(3)+\frac{2}{3}\right|-\left|-2{,}(6)-\frac{1}{3}\right|$.

10. Stabiliți care dintre următoarele numere sunt întregi:

$a=-\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{6}$; $b=-\left(+\frac{1}{5}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{10}$;

$c=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}$; $d=3+\left(-\frac{1}{5}\right)+0{,}2$.

11. Se consideră numerele raționale:

$$a=-1+\left(-\frac{3}{4}\right) \text{ și } b=-4\frac{1}{5}+4{,}1.$$

Calculați: $a+b$, $a-b$ și $b-a$.

EDITURA PARALELA 45

Unitatea: Triunghiul

PE-PP 1. Triunghi. Definiţie. Elemente. Clasificare. Perimetrul triunghiului

Definiţie: Fiind date trei puncte necoliniare A, B, C, se numește **triunghi determinat de punctele *A*, *B*, *C*** mulțimea formată de cele trei puncte, împreună cu mulțimea tuturor punctelor segmentelor AB, BC și CA (figura 1).

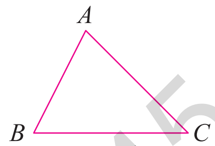


Fig. 1

Observaţii:

- Triunghiul este o mulțime de puncte din plan, adică **o figură geometrică**, care are trei laturi, trei vârfuri și trei unghiuri.
- Triunghiul determinat de punctele A, B, C se poate nota ΔABC, ΔACB, ΔBAC, ΔBCA, ΔCAB, ΔCBA (la citirea unui triunghi literele A, B, C pot fi așezate în orice ordine dorim).
- Punctele A, B, C se numesc **vârfurile triunghiului**. Segmentele AB, BC, CA se numesc **laturile triunghiului**. Unghiurile ABC, BCA, CAB se numesc **unghiurile triunghiului**.
- În triunghiul ABC, **latura *BC* se opune unghiului *A*** și, reciproc, **unghiul *A* este opus laturii *BC***, iar **unghiurile *B* și *C* sunt alăturate laturii *BC***.
- Pentru lungimile laturilor unui triunghi ABC, se mai folosesc notațiile: $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.
- Dacă nu există posibilitatea unor confuzii pentru unghiurile triunghiului ABC se pot folosi și notațiile $\sphericalangle ABC = \sphericalangle B$, $\sphericalangle BAC = \sphericalangle A$, $\sphericalangle ACB = \sphericalangle C$.

Definiţie: Suma lungimilor laturilor unui triunghi ABC se numește **perimetrul triunghiului,** se notează cu $\mathscr{P}_{ABC}$ și

$$\mathscr{P}_{ABC} = AB + BC + CA.$$

Observaţie: Semisuma lungimilor laturilor unui triunghi ABC se numește **semiperimetrul triunghiului**, se notează cu p_{ABC}, unde $p_{ABC} = \dfrac{AB + BC + CA}{2}$.

Definiţii:

- Un punct se numește **interior unui triunghi**, dacă punctul este interior fiecărui unghi al triunghiului.
- Mulțimea tuturor punctelor interioare unui triunghi, se numește **interiorul triunghiului**.
- Un punct care nu se află pe laturile triunghiului și care nu este nici interior triunghiului se numește **punct exterior triunghiului**, iar mulțimea tuturor punctelor exterioare unui triunghi formează **exteriorul triunghiului.**

Definiţie: Un triunghi care are laturile de lungimi diferite se numește **triunghi scalen** sau **triunghi oarecare** (figura 2).

Observaţii:

- Triunghiul scalen se mai poate defini ca un triunghi în care oricare două laturi nu sunt congruente.
- În figura 2, $AB = 3$ cm, $AC = 2$ cm, $BC = 2{,}5$ cm și triunghiul ABC este scalen.

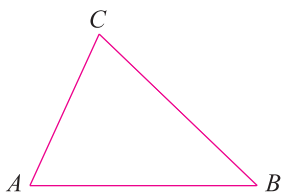


Fig. 2

EDITURA PARALELA 45

Definiţie: Un triunghi cu două laturi congruente se numește **triunghi isoscel,** iar cea de-a treia latură se numește **baza**[1] **triunghiului isoscel**.

Observaţii:

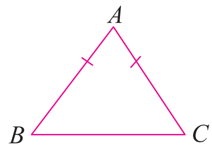


Fig. 3

- Triunghiul ABC din figura 3 este isoscel.
- Laturile congruente sunt AB și AC ($AB = AC$)
- Latura BC este baza triunghiului isoscel ABC.

Definiţie: Un triunghi cu toate laturile congruente se numește **triunghi echilateral**.

Observaţii:

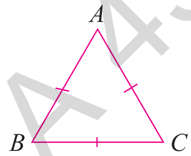


Fig. 4

- Triunghiul ABC din figura 4 este triunghi echilateral.
- Toate laturile sunt congruente, $AB = AC = BC$.
- Un triunghi echilateral este totodată triunghi isoscel, oricare două dintre laturile lui sunt congruente ($AB = AC$, $AB = BC$, $AC = BC$).

Definiţie: Un triunghi care are toate unghiurile ascuțite se numește **triunghi ascuțitunghic**.

Observaţii:

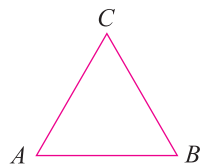


Fig. 5

- Triunghiul ABC din figura 5 este triunghi ascuțitunghic.
- Toate unghiurile triunghiului sunt ascuțite: $A < 90°$, $B < 90°$, $C < 90°$.

Definiţie: Un triunghi care are un unghi drept se numește **triunghi dreptunghic**. Laturile care formează unghiul drept se numesc **catete**, iar latura opusă unghiului drept se numește **ipotenuză**.

Observaţii:

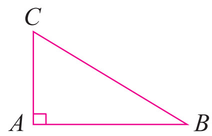


Fig. 6

- Triunghiul ABC din figura 6 este triunghi dreptunghic ($\sphericalangle A = 90°$).
- AB și AC sunt **catete**, BC este **ipotenuză**.

Definiţie: Un triunghi care are un unghi obtuz se numește **triunghi obtuzunghic**.

Observaţie: Triunghiul ABC din figura 7 este triunghi obtuzunghic ($\sphericalangle A > 90°$).

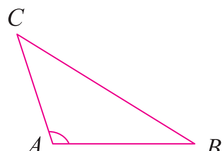


Fig. 7

Reţinem!

- Trei puncte necoliniare A, B, C determină **triunghiul ABC**. Notăm ΔABC și citim „triunghiul ABC”.
- Mulțimea punctelor care aparțin interioarelor tuturor unghiurilor triunghiului ABC formează **interiorul triunghiului ABC**. Notăm Int(ΔABC) și citim „interiorul triunghiului ABC”.

[1] Foarte probabil că denumirea de „bază” provine din preferința de a desena triunghiul isoscel cu „baza în jos”. Desigur, această preferință nu impune din punct de vedere geometric nimic. De altfel, și în această carte apar frecvent triunghiuri isoscele „cu baza în sus”.

EDITURA PARALELA 45

• Punctele care nu aparțin triunghiului ABC și nici interiorului acestuia formează **exteriorul triunghiului ABC**. Notăm Ext(ΔABC) și citim „exteriorul triunghiului ABC”.

• Dacă toate cele trei unghiuri ale unui triunghi sunt ascuțite, atunci triunghiul se numește **triunghi ascuțitunghic**.

• Dacă unul dintre unghiurile unui triunghi este unghi drept, atunci triunghiul se numește **triunghi dreptunghic**.

• Dacă unul dintre unghiurile unui triunghi este obtuz, atunci triunghiul se numește **triunghi obtuzunghic**.

• Un triunghi care are laturile de lungimi diferite două câte două se numește **triunghi oarecare** sau **triunghi scalen**.

• Un triunghi care are două laturi congruente se numește **triunghi isoscel**.

• Un triunghi care are toate cele trei laturi congruente se numește **triunghi echilateral**.

• Suma lungimilor laturilor unui triunghi se numește **perimetrul triunghiului**.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

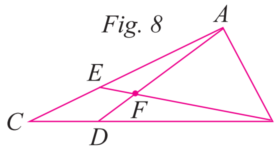
PE Înțelegere *

1. Desenați trei puncte necoliniare M, N, P și triunghiul determinat de cele trei puncte. Denumiți vârfurile, laturile și unghiurile triunghiului.

2. Desenați un triunghi ABC și precizați:
a) latura opusă unghiului A;
b) unghiul opus laturii AB;
c) unghiurile alăturate laturii BC.

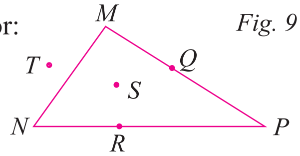
3. Fie patru puncte P, Q, R, H astfel încât oricare trei sunt necoliniare. Câte triunghiuri determină cele patru puncte? Denumiți aceste triunghiuri.

Fig. 8



4. Priviți figura 8. Scrieți apoi:
a) triunghiurile din figură care au ca latură comună pe AB;
b) triunghiurile din figură care au ca unghi comun pe $\sphericalangle FBD$;
c) numărul triunghiurilor din figură.

Fig. 9



5. Urmăriți figura 9 și stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $Q \in \Delta MNP$; b) $S \in$ Int(ΔMNP);
c) $R \notin \Delta MNP$; d) $T \in$ Int(ΔMNP);
e) $T \notin$ Ext(ΔMNP); f) $S \in$ Ext(ΔMNP).

6. Când spunem că un triunghi este isoscel? Dar echilateral? Dar dreptunghic? Dar obtuzunghic? Dar ascuțitunghic?

7. Un triunghi dreptunghic PQR are catetele PQ și QR. Precizați care este ipotenuza și care este unghiul drept.

8. Stabiliți natura triunghiului ABC știind că:
a) $AB = 4$ cm, $BC = 5$ cm, $AC = 6$ cm; b) $AB = AC = 6$ cm și $BC = 4$ cm;
c) $AB = AC = BC = 6$ cm.

9. Stabiliți natura triunghiului LMP știind că:
a) $\sphericalangle M = 90°$, $LM = 4$ cm, $MP = 4$ cm; b) $\sphericalangle M = 110°$, $LM = MP = 3$ cm;
c) $\sphericalangle M = 45°$, $\sphericalangle L = 65°$, $\sphericalangle P = 70°$.

EDITURA PARALELA 45

PE Aplicare și exersare **

10. Fie s unul dintre semiplanele determinate de o dreaptă d. Desenați două triunghiuri care să aibă o latură comună inclusă în d și câte un vârf în semiplanul s.

11. Desenați un triunghi MNP și fixați punctele:

a) A și B în interiorul triunghiului; b) C și D care să aparțină triunghiului;
c) E și F în exteriorul triunghiului.

12. Calculați perimetrul unui triunghi dacă:

a) semiperimetrul este 5,7 cm;

b) $AB = 4$ cm, $BC = \frac{3}{4} \cdot AB$ și lungimea laturii AC este media aritmetică a lungimilor laturilor AB și BC;

c) $AB = 30$ mm, $BC = 1{,}8$ cm și $AC = 0{,}24$ dm.

13. Aflați lungimile laturilor unui triunghi ABC știind că:

a) perimetrul triunghiului este de 9,6 cm, AC este cu 0,8 cm mai mare decât AB și reprezintă $\frac{4}{5}$ din BC;

b) perimetrul este 24 cm și lungimile laturilor sunt numere naturale pare, consecutive.

14. Se consideră un triunghi ABC și un punct D între A și B. Calculați lungimea laturii CD dacă perimetrele triunghiurilor ACD, BCD și ABC sunt egale cu 11 cm, 9 cm și, respectiv, 14 cm.

15. Stabiliți natura triunghiului MNP dacă:

a) $\sphericalangle M = 110°$; b) $MN = 4$ cm, $MP = 4$ cm și $\sphericalangle M = 90°$;
c) $MN = 3{,}2$ cm, $NP = 0{,}32$ dm și $MP = 32$ mm.

PE Aprofundare și performanță ***

16. Dacă $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, stabiliți dacă punctele A, B, C sunt coliniare în fiecare dintre cazurile:

a) $a = 7$ cm, $b = 5$ cm, $c = 8$ cm; b) $a = 8$ cm, $b = 11$ cm, $c = 3$ cm.

17. Se consideră un triunghi ABC și un punct D situat pe latura BC. Dacă $\mathscr{P}_{\Delta ABD} = 19$ cm, $\mathscr{P}_{\Delta ACD} = 26$ cm și $AD = 8$ cm, aflați $\mathscr{P}_{\Delta ABC}$.

18. Aflați lungimile laturilor triunghiului ABC, știind că perimetrul său este de 106 cm, lungimea laturii AB este 40% din lungimea laturii AC, iar lungimea laturii AC este 80% din lungimea laturii BC.

19. Lungimile laturilor unui triunghi sunt direct proporționale cu numerele 3, 5, 7, iar semiperimetrul triunghiului este egal cu 180 cm. Aflați lungimile laturilor triunghiului.

20. Aflați perimetrul unui triunghi isoscel, știind că lungimea fiecăreia dintre laturile congruente este cu 18 cm mai mare decât lungimea bazei, iar valoarea raportului celor două lungimi este 1,5.

PE-PP Supermate ****

21. Perimetrul unui triunghi isoscel este de 26 cm. Aflați lungimile laturilor triunghiului, știind că una dintre ele are lungimea egală cu 8 cm.

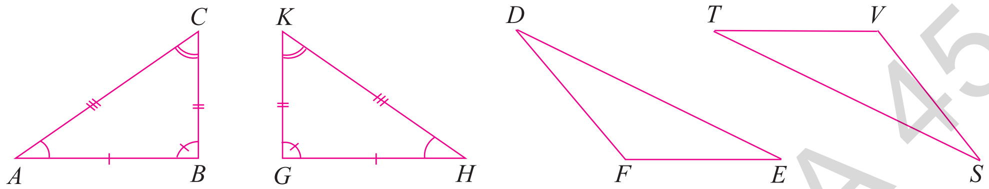
22. Aflați perimetrul unui triunghi echilateral, știind că valoarea raportului dintre lungimea laturii și cel mai mare număr natural de două cifre divizibil cu 15 este 0,8(6).

EDITURA PARALELA 45

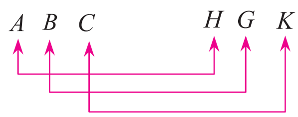
Unitatea: Congruenţa triunghiurilor (1)

PE-PP 1. Congruenţa triunghiurilor oarecare

Ne amintim că **două figuri geometrice sunt congruente dacă, prin suprapunere, coincid**. Triunghiul este o figură geometrică, deci două **triunghiuri care prin suprapunere coincid se numesc triunghiuri congruente**.



a) Pe o folie transparentă copiaţi triunghiul ABC. Suprapuneţi folia peste triunghiul HGK, astfel încât vârful A să se suprapună peste vârful H, vârful B să se suprapună peste vârful G şi vârful C să se suprapună peste vârful K. Astfel, prin această ordine de corespondenţă între vârfuri, observăm că triunghiurile coincid şi $AB \equiv HG$, $BC \equiv GK$, $AC \equiv HK$, respectiv $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle H$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle G$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle K$. Prin urmare, triunghiul ABC este congruent cu triunghiul HGK şi notăm $\Delta ABC \equiv \Delta HGK$. Notaţia pune în evidenţă **ordinea de corespondenţă** între vârfuri, perechi de laturi congruente şi perechi de unghiuri congruente. Perechile de laturi şi perechile de unghiuri respectiv congruente se numesc **laturi omoloage**, respectiv **unghiuri omoloage** ale triunghiurilor congruente.



b) Triunghiurile DEF şi STV sunt congruente şi notăm $\Delta DEF \equiv \Delta STV$, deoarece laturile omoloage DE şi ST, EF şi TV, DF şi SV sunt respectiv congruente ($DE \equiv ST$, $EF \equiv TV$, $DF \equiv SV$) şi unghiurile omoloage $\sphericalangle D$ şi $\sphericalangle S$, $\sphericalangle E$ şi $\sphericalangle T$, $\sphericalangle F$ şi $\sphericalangle V$ sunt respectiv congruente ($\sphericalangle D \equiv \sphericalangle S$, $\sphericalangle E \equiv \sphericalangle T$, $\sphericalangle F \equiv \sphericalangle V$).

Observaţie: În scrierea congruenţei triunghiurilor este esenţială ordinea de corespondenţă între elemente. Astfel, dacă $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$, nu rezultă că $\Delta ABC \equiv \Delta B'C'A'$ deoarece unghiurile omoloage în acest caz sunt altele decât cele din cazul anterior, dar rezultă că $\Delta BAC \equiv \Delta B'A'C'$, $\Delta ACB \equiv \Delta A'C'B'$, $\Delta CAB \equiv \Delta C'A'B'$, $\Delta CBA \equiv \Delta C'B'A'$, $\Delta BCA \equiv \Delta B'C'A'$.

Reţinem!

- Două triunghiuri care au laturile şi unghiurile respectiv congruente sunt congruente.
- Congruenţa triunghiurilor are următoarele proprietăţi:
  – **reflexivitate**: $\Delta ABC \equiv \Delta ABC$.
  – **simetrie**: dacă $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$, atunci $\Delta MNP \equiv \Delta ABC$.
  – **tranzitivitate**: dacă $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$ şi $\Delta MNP \equiv \Delta STR$, atunci $\Delta ABC \equiv \Delta STR$.

EDITURA PARALELA 45

● ● ● activități de învățare ● ● ●

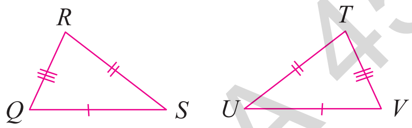
PE Înțelegere *

1. a) Când spunem că două triunghiuri sunt congruente?

b) Știind că $\Delta MNP \equiv \Delta QRS$, numiți unghiurile corespunzătoare congruente și laturile corespunzătoare congruente.

2. Explicați de ce scrierea $\Delta MNP \equiv \Delta QRS$ este *echivalentă* (reprezintă același lucru) cu scrierea $\Delta NMP \equiv \Delta RQS$.

3. În figura alăturată, triunghiurile sunt congruente, congruențele între segmente fiind marcate pe figură. Este corectă scrierea $\Delta QRS \equiv \Delta UVT$? Explicați de ce! Scrieți cum este corect!



4. Observați că din $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$ rezultă că $\Delta ACB \equiv \Delta A'C'B'$ și încă alte patru astfel de relații. Scrieți-le pe toate!

5. Ce fel de triunghi este triunghiul ABC, dacă putem scrie $\Delta ABC \equiv \Delta ACB$?

6. Congruența între triunghiuri are aceleași proprietăți ca și congruența între segmente, adică este simetrică, reflexivă și tranzitivă. Scrieți aceste proprietăți!

PE Aplicare și exersare **

7. Ce fel de triunghi este ΔABC dacă putem scrie $\Delta ABC \equiv \Delta ACB \equiv \Delta CBA$?

8. Ce relații trebuie să existe între elementele unui triunghi ABC pentru a fi posibile simultan congruențele:

a) $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$ și $\Delta ABC \equiv \Delta A'C'B'$?

b) $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$, $\Delta ABC \equiv \Delta A'C'B'$ și $\Delta ABC \equiv \Delta B'C'A'$?

9. Știind că $\Delta ABC \equiv \Delta PHD$ și $\sphericalangle A = 30°$, $\sphericalangle B = 45°$, $\sphericalangle C = 105°$, precizați măsurile unghiurilor triunghiului PHD.

10. Știind că $\Delta ABC \equiv \Delta QRH$ și $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm, $BC = 5$ cm, precizați lungimile laturilor triunghiului QRH.

11. a) Este adevărată propoziția: „dacă $AB \equiv QR$ și $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle Q$, atunci $\Delta ABC \equiv \Delta QRP$”?

b) Completați astfel încât să obțineți o propoziție adevărată: „dacă $AB \equiv QR$, $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle Q$, ..., atunci $\Delta ABC \equiv \Delta QRP$”.

PE Aprofundare și performanță ***

12. Se consideră triunghiurile congruente $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$. Se știe că $AB = 4$ cm, $\sphericalangle A = 60°$ și $AC = 8$ cm.

a) Construiți triunghiul ABC.

b) Scrieți perechile de unghiuri congruente ale triunghiurilor.

c) Scrieți lungimile laturilor MN și MP.

13. Se consideră triunghiurile congruente $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$.

a) Dacă $MN = 4$ cm, $NP = 3$ cm și $MP = 5$ cm, calculați lungimile laturilor triunghiului ABC.

b) Dacă $\sphericalangle A = 90°$, $\sphericalangle B = 30°$ și $\sphericalangle C = 60°$, calculați măsurile unghiurilor triunghiului MNP.

EDITURA PARALELA 45

Unitatea: Congruenţa triunghiurilor (2)

PE-PP 1. Criteriile (cazurile) de congruenţă a triunghiurilor dreptunghice

Definiţie: Un triunghi care are un unghi drept se numește **triunghi dreptunghic**. Latura care se opune unghiului drept se numește **ipotenuză.** Celelalte două laturi se numesc **catete**.

Figura 1 este un triunghi dreptunghic: $\sphericalangle A = 90°$, BC este ipotenuza, iar AB și AC sunt catetele.

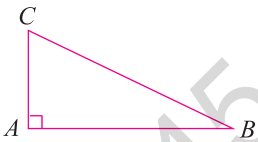


Fig. 1

Următoarele teoreme sunt denumite cazuri de congruență ale triunghiurilor dreptunghice:

Cazul CC (catetă-catetă). Două triunghiuri dreptunghice care au catetele respectiv congruente sunt congruente.

Mai precis, oricare ar fi două triunghiuri dreptunghice ΔABC și $\Delta A'B'C'$, cu $\sphericalangle A = \sphericalangle A' = 90°$, dacă $AB \equiv A'B'$ și $AC \equiv A'C'$, atunci $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$ (figura 2).

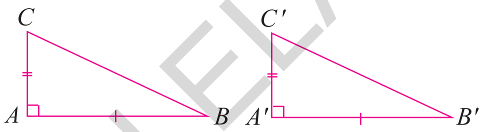


Fig. 2

Cazul CU (catetă-unghi). Două triunghiuri dreptunghice care au câte o catetă și câte un unghi ascuțit respectiv congruente sunt congruente.

Mai precis, oricare ar fi două triunghiuri dreptunghice ΔABC și $\Delta A'B'C'$ cu $\sphericalangle A = \sphericalangle A' = 90°$, dacă $AB \equiv A'B'$ și $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$, atunci $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$ (figura 3).

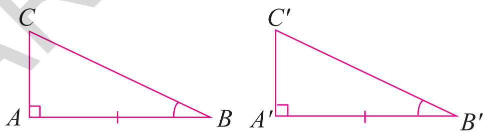


Fig. 3

Cazul IU (ipotenuză-unghi). Două triunghiuri dreptunghice care au ipotenuza și câte un unghi ascuțit respectiv congruente sunt congruente.

Mai precis, oricare ar fi două triunghiuri dreptunghice ΔABC și $\Delta A'B'C'$ cu $\sphericalangle A = \sphericalangle A' = 90°$, dacă $BC \equiv B'C'$ și $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$, atunci $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$ (figura 4).

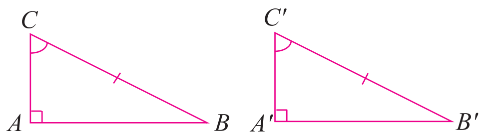


Fig. 4

Cazul IC (ipotenuză-catetă). Două triunghiuri dreptunghice care au ipotenuza și o catetă respectiv congruente sunt congruente.

Mai precis, oricare ar fi două triunghiuri dreptunghice ΔABC și $\Delta A'B'C'$ cu $\sphericalangle A = \sphericalangle A' = 90°$, dacă $BC \equiv B'C'$ și $AB \equiv A'B'$, atunci $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$ (figura 5).

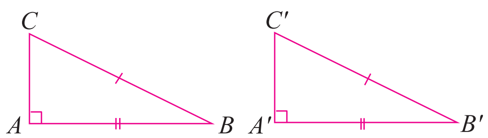


Fig. 5

Observaţie: Dacă două triunghiuri dreptunghice sunt congruente, atunci unghiurile lor sunt respectiv congruente și laturile lor sunt respectiv congruente. Altfel spus:

Dacă $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$, atunci avem relațiile:

$\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$; $BC \equiv B'C'$, $AC \equiv A'C'$, $AB \equiv A'B'$.

EDITURA PARALELA 45

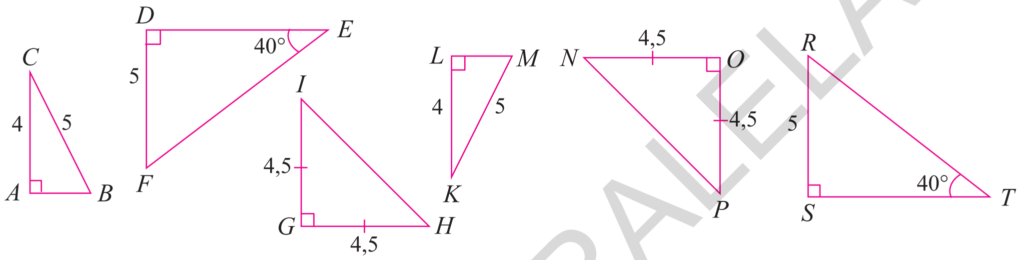
Reţinem!

Două triunghiuri dreptunghice sunt congruente dacă au:
– catetele respectiv congruente, **cazul CC (catetă-catetă)**;
– câte o catetă şi câte un unghi ascuţit respectiv congruente, **cazul CU (catetă-unghi)**;
– ipotenuza şi câte un unghi ascuţit respectiv congruente, **cazul IU (ipotenuză-unghi)**;
– ipotenuza şi câte o catetă respectiv congruente, **cazul IC (ipotenuză-catetă)**.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Studiați triunghiurile dreptunghice de mai jos și precizați care sunt congruente și care este cazul de congruență în fiecare caz în parte.



2. Construiți un triunghi dreptunghic ABC cu $\sphericalangle A = 90^\circ$, știind că:

a) $AB = 3$ cm și $AC = 4$ cm; b) $AB = 5$ cm și $\sphericalangle B = 30^\circ$;
c) $AB = 4$ cm și $BC = 6$ cm; d) $BC = 6$ cm și $\sphericalangle C = 60^\circ$.

3. Fie un triunghi dreptunghic ABC cu $\sphericalangle A = 90^\circ$. Pe dreapta AB se consideră un punct D, astfel încât A să fie mijlocul lui BD. Demonstrați că $CD \equiv CB$.

4. Se consideră punctele coliniare $A – O – B$ și $C – O – D$. Știind că $\sphericalangle ACO = \sphericalangle DBO = 90^\circ$ și $AO \equiv DO$, demonstrați că triunghiul BOC este isoscel.

5. Se notează cu $d(M, AB)$ distanța de la punctul M la dreapta AB, adică lungimea segmentului determinat de punctul M și piciorul perpendicularei din M pe AB. Dacă M este un punct oarecare pe bisectoarea unui unghi xOy, demonstrați că $d(M, Ox) = d(M, Oy)$.

6. Fie un unghi xOy și M un punct ce aparține interiorului unghiului. Demonstrați că, dacă $d(M, Ox) = d(M, Oy)$, atunci OM este bisectoarea unghiului.

7. Se consideră un triunghi ABC. Demonstrați că dacă $d(B, AC) = d(C, AB)$, atunci $AB \equiv AC$.

8. Se consideră un triunghi MNP. Demonstrați că, dacă $d(N, MP) = d(P, MN)$, atunci $\sphericalangle MNP = \sphericalangle MPN$.

9. Se consideră triunghiurile isoscele ABC și $A'B'C'$, cu bazele BC, respectiv $B'C'$. Dacă $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$ și $d(A, BC) = d(A', B'C')$, demonstrați că cele două triunghiuri sunt congruente.

10. În triunghiul MNP se construiește $MQ \perp NP$, punctul Q se află pe segmentul NP. Dacă $NQ \equiv PQ$, demonstrați că $MN \equiv MP$.

EDITURA PARALELA 45

PE-PP

1. Proprietăţile triunghiului isoscel

Ne amintim că un triunghi cu două laturi congruente este un **triunghi isoscel**.

Dacă triunghiul ABC (figura 1) este isoscel cu laturile AB și AC congruente ($AB = AC$), atunci **BC este baza triunghiului** isoscel și **unghiul A este unghi opus bazei BC, iar unghiurile B și C sunt unghiuri alăturate bazei BC.**

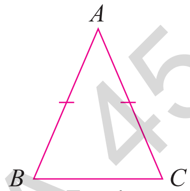


Fig. 1

Problema 1:

Demonstrați că:

a) dacă un triunghi este isoscel, atunci unghiurile alăturate bazei sunt congruente;

b) dacă două unghiuri ale unui triunghi sunt congruente, atunci triunghiul este isoscel, având ca bază latura determinată de vârfurile celor două unghiuri.

Demonstrație:

a) Fie ABC (figura 2) triunghiurile isoscel ($AB = AC$).

Considerăm triunghiurile ABC și ACB.

Din $\begin{cases} \bullet AB = AC \text{ (ipoteză)} \\ \bullet BC = CB \text{ (latură comună)} \\ \bullet AC = AB \text{ (ipoteză)} \end{cases}$ și cazul de congruență LLL rezultă $\Delta ABC \equiv \Delta ACB$. Conform definiției triunghiurilor congruente rezultă $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB$, respectiv $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle CAB$. Deci $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$;

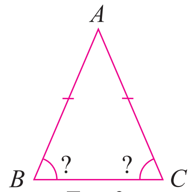


Fig. 2

b) Fie MNP (figura 3) un triunghi cu $\sphericalangle PMN \equiv \sphericalangle PNM$.

Considerăm triunghiurile PMN și PNM.

Din $\begin{cases} \bullet \sphericalangle PMN \equiv \sphericalangle PNM \text{ (ipoteză)} \\ \bullet MN = NM \text{ (latură comună)} \\ \bullet \sphericalangle PNM \equiv \sphericalangle PMN \text{ (ipoteză)} \end{cases}$ și cazul de congruență ULU rezultă $\Delta PMN \equiv \Delta PNM$. Conform definiției triunghiurilor congruente rezultă $PM \equiv PN$, $PN \equiv PM$ și $\sphericalangle MPN \equiv \sphericalangle NPM$. Deci $PM = PN$.

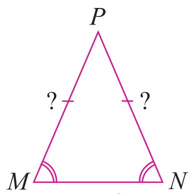


Fig. 3

Problema 2:

Se consideră un triunghiurile isoscel ABC cu $AB = AC$ și AM mediană.

Demonstrați că triunghiurile ABM și ACM sunt congruente și deduceți că mediana AM este și înălțimea din vârful unghiului opus bazei, semidreapta AM este bisectoare a unghiului opus bazei și dreapta AM este mediatoarea bazei BC.

Demonstrație:

Considerăm triunghiurile ABM și ACM (figura 4).

Din $\begin{cases} \bullet AB = AC \text{ (ipoteză)} \\ \bullet BM = CM \text{ (ipoteză)} \\ \bullet AM = AM \text{ (latură comună)} \end{cases}$ și cazul de congruență LLL rezultă $\Delta ABM \equiv \Delta ACM$. Din definiția congruenței triunghiurilor rezultă $\sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle ACM$ (1), $\sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle CAM$ (2), $\sphericalangle AMB \equiv AMC$ (3).

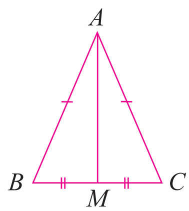


Fig. 4

EDITURA PARALELA 45

Din (3) și faptul că $\sphericalangle AMB + \sphericalangle AMC = 180°$ rezultă $\sphericalangle AMB = \sphericalangle AMC = 180° : 2 = 90°$ și $AM \perp BC$, adică mediana AM este înălțime. Din (2) rezultă că semidreapta AM este bisectoarea unghiului opus bazei. Din $AM \perp BC$ și $BM = CM$ rezultă că dreapta AM este mediatoarea segmentului BC (vârful A al triunghiului isoscel ABC se află pe mediatoarea bazei BC).

Observație: Dreapta AM ($M \in BC$, $BM = CM$) este și axă de simetrie a triunghiului isoscel ABC.

Problema 3:

Punctul P se află pe latura BC a triunghiului ABC. Segmentul AP este mediană ($P \in BC$, $BP = CP$) și înălțime ($P \in BC$, $AP \perp BC$).

Demonstrați că triunghiul ABC este isoscel.

Demonstrație:

Considerăm triunghiurile dreptunghice ABP și ACP (figura 5), $\sphericalangle APB = \sphericalangle APC = 90°$ deoarece $AP \perp BC$.

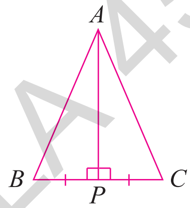


Fig. 5

Din $\begin{cases} \bullet BP = CP \text{ (ipoteză)} \\ \bullet AP = AP \text{ (latură comună)} \end{cases}$ și cazul de congruență CC

rezultă $\Delta ABP \equiv \Delta ACP$. Din definiția congruenței triunghiurilor rezultă $\sphericalangle ABP \equiv \sphericalangle ACP$ (1), $AB \equiv AC$ (2) și $\sphericalangle BAP \equiv \sphericalangle CAP$ (3).

Din (2) rezultă că triunghiul ABC este isoscel.

Observație: Triunghiul în care o mediană este și înălțime este un triunghi isoscel.

Reținem!

- Un triunghi este isoscel dacă și numai dacă unghiurile alăturate bazei sunt congruente.
- Pentru a demonstra că un triunghi este isoscel este suficient să arătăm că două dintre dreptele determinate de liniile importante corespunzătoare unei laturi coincid, iar latura respectivă este baza triunghiului isoscel.
- Dacă un triunghi este isoscel, atunci:

– medianele corespunzătoare laturilor congruente sunt congruente;
– înălțimile corespunzătoare laturilor congruente sunt congruente;
– bisectoarele corespunzătoare unghiurilor congruente sunt congruente.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Construiți un triunghi isoscel ABC cu $AB = AC$, știind că:

a) $AB = 5$ cm și $BC = 6$ cm; b) $\sphericalangle A = 60°$ și $AC = 4$ cm;

c) $BC = 7$ cm și $\sphericalangle A = 70°$.

2. Se consideră triunghiul isoscel ABC.

a) Dacă $AB = 3$ cm și $AC = 4$ cm, calculați BC.

b) Dacă $AB = 3$ cm și $AC = 7$ cm, calculați BC.

3. Unul dintre unghiurile unui triunghi isoscel are măsura de 40°. Calculați măsurile celorlalte unghiuri ale triunghiului.

EDITURA PARALELA 45

4. Măsurile a două dintre unghiurile unui triunghi isoscel sunt proporționale cu 5 și 8. Calculați măsurile unghiurilor triunghiului, știind că acestea sunt reprezentate prin numere naturale.

5. În triunghiul isoscel ABC se știe că $\sphericalangle BAC = 120°$. Calculați măsurile celorlalte unghiuri ale triunghiului.

6. În triunghiul ABC se știe că $\sphericalangle ABC = 70°$ și $\sphericalangle ACB = 40°$. Stabiliți natura triunghiului ABC.

7. Fie triunghiul dreptunghic ABC, cu $\sphericalangle A = 90°$. Dacă triunghiul ABC este isoscel, atunci:

a) laturile congruente ale triunghiului sunt: …;

b) unghiurile ascuțite ale acestuia sunt … și au măsura egală cu …° fiecare.

8. Construiți un triunghi isoscel MNP cu baza MN, cunoscând că:

a) $PM = 6$ cm și $MN = 5$ cm; b) $PM = 4{,}5$ cm și $MN = 6$ cm.

9. Construiți un triunghi isoscel ABC cu baza BC, cunoscând că:

a) $AB = 3{,}5$ cm și $\sphericalangle A = 30°$; b) $AB = 40$ mm și $\sphericalangle A = 135°$.

10. Construiți un triunghi isoscel MNT astfel încât $\Delta MNT \equiv \Delta ABC$, unde ΔABC este triunghiul din problema 9.b).

PE Aplicare și exersare **

11. Se consideră un triunghi isoscel MNP și se construiește $EF \parallel NP$. Demonstrați că triunghiul MEF este isoscel.

12. În triunghiul isoscel ABC, cu $AB = AC$, se notează cu M mijlocul laturii BC. Bisectoarea unghiului ABC intersectează latura opusă în N. Dacă $AM \cap BN = \{O\}$ și $\sphericalangle ABC = 50°$, calculați:

a) măsurile unghiurilor triunghiului BCO; b) măsurile unghiurilor triunghiului ABN.

13. Demonstrați că în orice triunghi isoscel:

a) unghiurile de la baza triunghiului sunt congruente;

b) bisectoarele unghiurilor de la bază sunt congruente;

c) medianele corespunzătoare laturilor congruente sunt congruente;

d) înălțimile corespunzătoare laturilor congruente sunt congruente.

14. Se consideră un triunghi ABC și M mijlocul laturii BC. Dacă $AM \perp BC$, arătați că triunghiul este isoscel.

15. Se consideră un triunghi ABC și fie semidreapta AA' bisectoarea unghiului A. Dacă $AA' \perp BC$, arătați că triunghiul ABC este isoscel.

16. Se consideră un triunghi ABC și se ia un punct M pe latura BC astfel încât $BM \equiv MC$. Dacă semidreapta AM este bisectoarea unghiului A, arătați că triunghiul ABC este isoscel.

17. Fie un triunghi isoscel ABC cu baza BC și un punct D interior triunghiului, astfel încât $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle ACD$. Demonstrați că semidreapta AD este bisectoarea unghiului BAC.

18. Se consideră un triunghi isoscel ABC cu baza BC și punctele E pe segmentul AB și F pe segmentul AC. Dacă $BF \cap CE = \{D\}$ și $AE \equiv AF$, demonstrați că $AD \perp BC$.

19. Fie un triunghi isoscel ABC cu baza BC și punctele M pe segmentul AB, respectiv N pe segmentul AC, încât $AM \equiv AN$. Dacă $AD \perp BC$ (D se află BC), arătați că $\sphericalangle DMN \equiv \sphericalangle DNM$.

EDITURA PARALELA 45

Indicații și răspunsuri

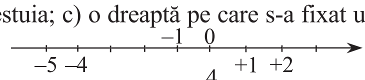
SOLUȚIILE TESTELOR DE AUTOEVALUARE POT FI CONSULTATE AICI:
(Scanați codul QR cu camera telefonului, nu din aplicația Mate2000+)

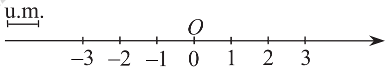
ALGEBRĂ

CAPITOLUL. MULȚIMEA NUMERELOR ÎNTREGI

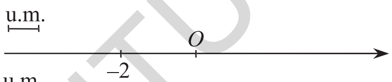
Unitatea: MULȚIMEA NUMERELOR ÎNTREGI. REPREZENTARE PE AXA NUMERELOR. COMPARARE ȘI ORDONARE

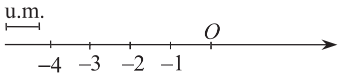
1. Număr întreg. Mulțimea numerelor întregi. Opusul unui număr întreg. Reprezentarea pe axă a numerelor întregi

1. a) număr întreg; b) acel număr întreg care se obține din numărul întreg considerat prin schimbarea semnului acestuia; c) o dreaptă pe care s-a fixat un punct numit origine, un sens pozitiv și o unitate de măsură. **2.** a) 

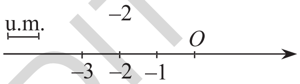
; b) analog; c) analog; d) se ia unitatea de măsură 0,5 mm. **3.** a) naturale sunt: 3; 0; $\frac{4}{2}=2$; 41 și întregi sunt: –17; +3; 0; $\frac{4}{2}=2$; –13; 41; b) naturale sunt: 0; 83; +15; +43 și întregi sunt: –3; 0; 83; +15; +43; –17. **4.** $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ deoarece orice număr natural este și întreg, iar $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$, deoarece există numere întregi negative care nu sunt naturale. Exemple: $-4 \in \mathbb{Z}$ și $-4 \notin \mathbb{N}$. **5.** {–3}; {0}; {2}; {–3, 0}; {–3, 2}; {0, 2}; {–3, 0, 2}; ∅. **6.** a) –3; 14; 0; –11; 13; –2; 3; –4; 7; –5; 12; b) 15; –13; 0; 17; –2; 1; –1; 7; –5; –4; 5; c) 3; –7; 0; –3; 14; –15; –13; 12; –4; 8; 17. **7.** a) +1; +2; +4; b) –4; –3; –1; c) –4 și + 4; –1 și +1; d) 0; 1; 2; 4. **8.** a) A = {+2, –3, 0, +444, +3, –7, –2}; b) A = {+4, +3, +2, +1, 0, –1, –2, –3}. **9.** +7, –5, +3, 0, –2, +1, –6, +4. **10.** De exemplu: a) 1, 5, 6; b) –1, 1, 3; c) –3, –4, –1; d) 0, 1, 2; e) –7, –2, –1; f) 2, 3, 7. **11.** a) –3, –2, –1, 0, 1, 2; b) –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4; c) –3, –2, –1, 0, 1. **12.** a) 7, 14, 21; b) 14, 7, 0, –7, –14, –21, –28. **13.** Adevărate sunt: b), e), f), h), i). **14.** A = {–4; –7; 2; 0; +5}; B = {2; 0; +5}; C = {–4; –7}. **15.** a) A = {+5, 0, 2, +8, +3, 4}; b) B = {–4, 0, 2, +8, 4}; c) C = {–7, –9, –1}; d) D = {–4, 2, 8, 4}. **16.** A = {–4, –3, –2, –1, 0, 1, 2}; B = {–2, –1, 1, 2, 3}. **17.** a) 

;

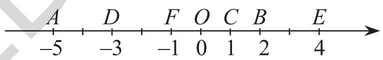
b) 

; c) 

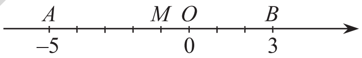
;

d) 

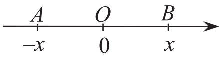
. **18.** a) –10, –8, –6, –4, –2; b) –15, –13, –11.
19. a) –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3; b) –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5; c) –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3. **20.** –7°.

21. a) 

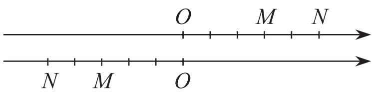
; b) AE = 9 cm; BD = 5 cm; EF = 5 cm.

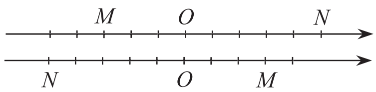
22. a) 

; b) $OA + OB + AM + AB = 5 + 3 + 4 + 8 = 20$ (u.m.).

23. 

a) Din $AB + 5OB = 14 \Rightarrow 2x + 5x = 14 \Rightarrow 7x = 14 \Rightarrow x = 2$;
b) Din $3OA + 5BO = 16 \Rightarrow 3x + 5x = 16 \Rightarrow 8x = 16 \Rightarrow x = 2$.

24. a) 



EDITURA PARALELA 45

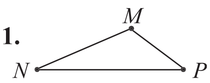
obținem $a \cdot b = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{7}{9} \cdot ... \cdot \frac{2019}{2021} \cdot \frac{2021}{2023} = \frac{1}{2023}$. Calculăm $a \cdot b + \frac{2022}{2023} = \frac{1}{2023} + \frac{2022}{2023} = \frac{2023}{2023} = 1$ și 1 este număr natural; b) Observăm că $\frac{1}{3} < \frac{3}{5}$, pentru că $5 < 9$ și analog $\frac{5}{7} < \frac{7}{9}, ..., \frac{2019}{2021} < \frac{2021}{2023}$. Înmulțind relațiile obținem: $\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{9}{11} \cdot ... \cdot \frac{2019}{2021} < \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{11}{13} \cdot ... \cdot \frac{2021}{2023}$, adică $a < b$. Din $a < b \mid \cdot\, a$ rezultă că $a^2 < ab$ și cum $ab = \frac{1}{2023}$ și $\frac{1}{2023} < 0{,}005$, rezultă că $a^2 < 0{,}0005$.

GEOMETRIE

CAPITOLUL. TRIUNGHIUL

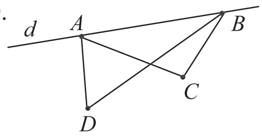
Unitatea: TRIUNGHIUL

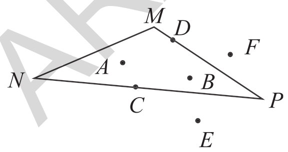
1. Triunghi. Definiție. Elemente. Clasificare. Perimetrul triunghiului

1. 

vârfuri: M, N, P; laturi: MN, PN, MP; unghiuri: MNP, MPN, NMP.

2. a) BC; b) $\sphericalangle C$; c) $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle C$. **3.** 4 triunghiuri: PQR, PQH, PRH, QRH. **4.** a) ABF, ABD, ABE, ABC; b) FBD, EBC. **5.** Adevărate: a), b), iar restul false. **6.** Are două laturi congruente; are toate laturile congruente; are un unghi drept; are un unghi obtuz; are toate unghiurile ascuțite. **7.** Ipotenuza este PR și $\sphericalangle Q = 90°$. **8.** a) scalen; b) isoscel; c) echilateral. **9.** a) dreptunghic isoscel; b) obtuzunghic isoscel; c) ascuțitunghic.

10. 

11. 

12. a) 11,4 cm; b) 10,5 cm; c) 7,2 cm. **13.** a) $BC = 4$ cm; $AB = 2{,}4$ cm; $AC = 3{,}2$ cm; b) 6 cm, 8 cm, 10 cm. **14.** 3 cm. **15.** a) obtuzunghic; b) dreptunghic isoscel; c) echilateral. **16.** a) $7 < 5 + 8$, $5 < 7 + 8$ și $8 < 7 + 5 \Rightarrow$ punctele A, B, C determină un triunghi, deci sunt necoliniare; b) $11 = 8 + 3$, adică $b = a + c \Rightarrow$ nu există ΔABC, deci punctele A, B, C sunt coliniare. **17.** $\mathscr{P}_{\Delta ABD} = 19$ cm $\Rightarrow AB + AD + BD = 19$ cm $\Rightarrow AB + BD = 11$ cm (1); $\mathscr{P}_{\Delta ACD} = 26$ cm $\Rightarrow AC + AD + DC = 26$ cm $\Rightarrow AC + DC = 18$ cm (2). Atunci $\mathscr{P}_{\Delta ABC} = AB + BC + AC = AB + AC + BD + DC \overset{(1),(2)}{=} 29$ cm. **18.** $AB = 16$ cm, $BC = 50$ cm, $CA = 40$ cm. **19.** 72 cm, 120 cm și 168 cm. **20.** 144 cm. **21.** În triunghiul ABC presupunem laturile AB și AC congruente. Cazul 1: $AB = AC = 8$ cm rezultă $BC = 26$ cm $- 16$ cm $= 10$ cm. Cazul 2: $BC = 8$ cm rezultă $AB = (26$ cm $- 8$ cm$) : 2 = 9$ cm. **22.** 234 cm. **23.** Fie a, b, c lungimile laturilor triunghiului. Presupunem că $a \le b \le c$. Atunci $a, b \le 4$ și $c \ge 5$. Avem imediat $c < a + b \le 4 + 4 = 8$, adică $c \in \{5, 6, 7\}$ (1). În funcție de valorile lui c din (1) analizăm, pe rând, cazurile: i) $c = 5 \Rightarrow (a, b) \in \{(2, 4); (3, 3); (3, 4); (4, 4)\}$, adică există două triunghiuri isoscele; ii) $c = 6 \Rightarrow (a, b) \in \{(3, 4); (4, 4)\}$, adică există un singur triunghi isoscel; iii) $c = 7 \Rightarrow a = b = 4$, adică există un singur triunghi isoscel. În total există 4 triunghiuri isoscele. **24.** $a = 15$, $b = 10$, $c = 6$; $c = 24\%$ din $(a + b)$. **25.** Fie A, B, C, D, E, F cele 6 puncte, astfel încât oricare trei sunt necoliniare. Atunci sunt 5 segmente cu o extremitate în A: AB, AC, AD, AE și AF. Aplicând principiul cutiei, oricum le-am colora cu roșu sau cu albastru, există cel puțin trei segmente de aceeași culoare. Presupunem AB, AC, AD colorate în roșu. Studiem ce culoare au laturile triunghiului BCD: i) Dacă una dintre laturile acestui triunghi are culoarea roșie, atunci triunghiul determinat de acea latură și punctul A este roșu. ii) Dacă niciuna dintre laturile acestui triunghi nu are culoarea roșie, atunci ΔBCD este albastru, adică există cel puțin un triunghi de aceeași culoare.

EDITURA PARALELA 45

Cuprins

ALGEBRĂ

Capitolul I. Mulțimea numerelor întregi

Unitatea: Mulțimea numerelor întregi. Reprezentare pe axa numerelor. Comparare și ordonare

1. Număr întreg. Mulțimea numerelor întregi. Opusul unui număr întreg. Reprezentarea pe axă a numerelor întregi 7
2. Modulul unui număr întreg. Compararea și ordonarea numerelor întregi 12
3. Recapitulare și sistematizare prin teste 16

Test de autoevaluare 19

Unitatea: Operații cu numere întregi (1)

1. Adunarea numerelor întregi. Scăderea numerelor întregi 21
2. Proprietățile adunării numerelor întregi 25
3. Recapitulare și sistematizare prin teste 28

Test de autoevaluare 31

Unitatea: Operații cu numere întregi (2)

1. Înmulțirea numerelor întregi. Proprietăți 33
2. Împărțirea numerelor întregi 38
3. Recapitulare și sistematizare prin teste 42

Test de autoevaluare 45

Unitatea: Operații cu numere întregi (3)

1. Puterea unui număr întreg cu exponent număr natural. Reguli de calcul cu puteri 47
2. Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor 52
3. Recapitulare și sistematizare prin teste 55

Test de autoevaluare 59

Unitatea: Ecuații, inecuații, probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor sau inecuațiilor în mulțimea numerelor întregi

1. Ecuații în mulțimea numerelor întregi 61
2. Inecuații în mulțimea numerelor întregi 65
3. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor, respectiv inecuațiilor în contextul numerelor întregi 68
4. Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană 71
5. Recapitulare și sistematizare prin teste 74

Test de autoevaluare 77

Probleme pentru pregătirea concursurilor școlare 79

AUTOEVALUARE 80

Capitolul. Mulțimea numerelor raționale

Unitatea: Mulțimea numerelor raționale. Reprezentare pe axa numerelor. Comparare și ordonare

1. Mulțimea numerelor raționale. Număr rațional 82
2. Reprezentarea numerelor raționale pe axa numerelor. Opusul unui număr rațional. Modulul unui număr rațional. Compararea și ordonarea numerelor raționale 89
3. Recapitulare și sistematizare prin teste 95

Test de autoevaluare 99

Unitatea: Operații cu numere raționale

1. Adunarea și scăderea numerelor raționale. Proprietăți 101
2. Înmulțirea și împărțirea numerelor raționale. Proprietăți 106
3. Puterea cu exponent număr întreg a unui număr rațional nenul. Reguli de calcul cu puteri . 111
4. Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor 116
5. Recapitulare și sistematizare prin teste 118

Test de autoevaluare 123

EDITURA PARALELA 45

Unitatea: Ecuații de tipul: $x + a = b$, $x \cdot a = b$, $x : a = b$ $(a \neq 0)$, $ax + b + c$, unde a, b, c sunt numere raționale. Proleme care se rezolvă folosind ecuații de acest tip
1. Ecuații de tipul: $x + a = b$, $x \cdot a = b$, $x : a = b$ $(a \neq 0)$, $ax + b + c$, unde a, b, c sunt numere raționale 125
2. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor 129
3. Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană 133
4. Recapitulare și sistematizare prin teste 137
Test de autoevaluare 141
Probleme pentru pregătirea concursurilor școlare 143
AUTOEVALUARE 144

GEOMETRIE
Capitolul. Triunghiul
Unitatea: Triunghiul
1. Triunghi. Definiție. Elemente. Clasificare. Perimetrul triunghiului 147
2. Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi. Unghi exterior unui triunghi, teorema unghiului exterior 151
3. Construcția triunghiurilor. Inegalități între elementele triunghiului 155
4. Linii importante în triunghi. Bisectoarele unghiurilor unui triunghi. Cercul înscris în triunghi 160
5. Linii importante în triunghi. Mediatoarele laturilor unui triunghi. Cercul circumscris unui triunghi 163
6. Linii importante în triunghi. Înălțimile unui triunghi. Ortocentrul unui triunghi 166
7. Linii importante în triunghi. Medianele unui triunghi. Centrul de greutate al unui triunghi 169
8. Recapitulare și sistematizare prin teste 173
Test de autoevaluare 177
Unitatea: Congruența triunghiurilor (1)
1. Congruența triunghiurilor oarecare 179
2. Criteriile (cazurile) de congruență a triunghiurilor 181
3. Metoda triunghiurilor congruente 184
4. Recapitulare și sistematizare prin teste 188
Test de autoevaluare 191
Unitatea: Congruența triunghiurilor (2)
1. Criteriile (cazurile) de congruență a triunghiurilor dreptunghice 193
2. Aplicații. Proprietatea punctelor de pe bisectoarea unui unghi. Proprietatea punctelor de pe mediatoarea unui segment 196
3. Recapitulare și sistematizare prin teste 201
Test de autoevaluare 205
Unitatea: Triunghiuri particulare
1. Proprietățile triunghiului isoscel 207
2. Proprietățile triunghiului echilateral 211
3. Proprietățile triunghiului dreptunghic. 215
4. Teorema lui Pitagora. Reciproca teoremei lui Pitagora 221
5. Recapitulare și sistematizare prin teste 225
Test de autoevaluare 229
Probleme pentru pregătirea concursurilor școlare 231
AUTOEVALUARE 232

RECAPITULARE FINALĂ
Teme recapitulare finală 233
Teste de evaluare finală 246

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI 251

EDITURA PARALELA 45